МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

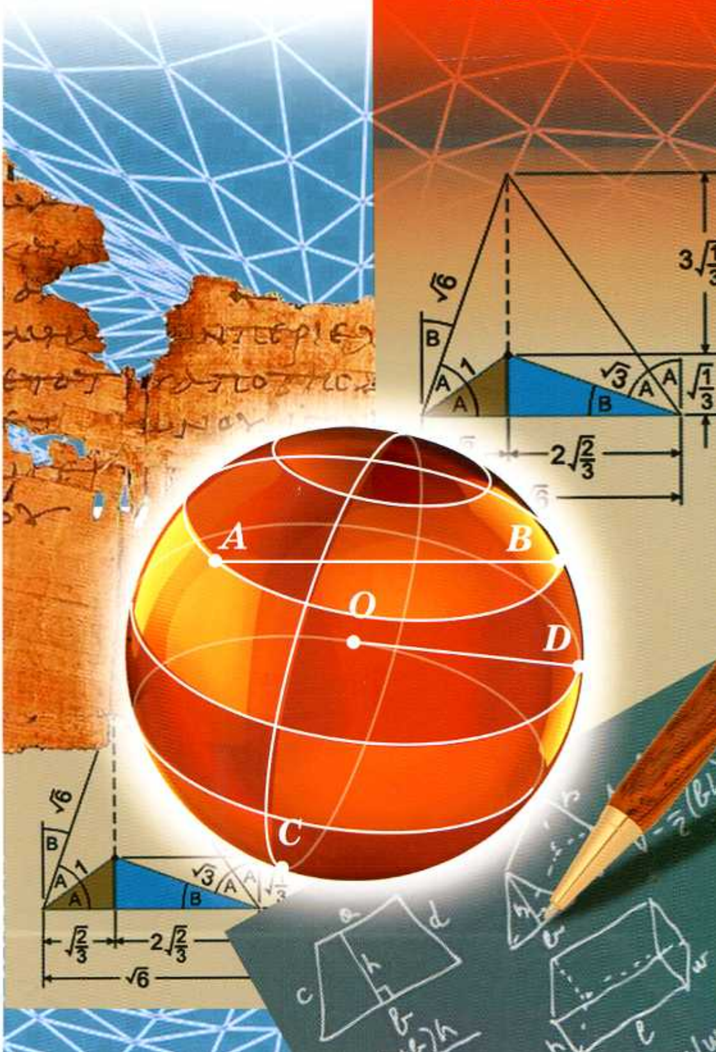
И. Ф. Шарыгин

ГЕОМЕТРИЯ

ФГОС

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

10–11 классы



ВЕРТИКАЛЬ

ДРОФА

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

И. Ф. Шарыгин

ГЕОМЕТРИЯ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

10–11

Учебник

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

ВЕРТИКАЛЬ

МОСКВА

ДРОФА

2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Ш26

Учебник получил положительное заключение Российской академии наук (№ 10106-5215/270 от 12.10.2012 г.) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-437 от 11.10.2012 г.)

При оформлении книги использованы фрагменты рисунков академика *А. Т. Фоменко*

Шарыгин, И. Ф.
Ш26 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10—11 классы : учебник / И. Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 2013. — 236, [4] с. : ил.
ISBN 978-5-358-11050-2

Учебник входит в учебно-методический комплекс по математике для 10—11 классов и реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения курса по стереометрии. Особое внимание уделено методам решения геометрических задач, а также реализовано дифференцированное изложение учебного материала: знаком (*) отмечен материал для углублённой подготовки; буквой (**в**) — важные, (**п**) — полезные, (**т**) — трудные задачи.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования, рекомендован Министерством образования и науки РФ и включён в Федеральный перечень учебников.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-358-11050-2

Введение

Но надо жить без самозванства,
Так жить, чтобы в конце концов
Привлечь к себе любовь Пространства,
Услышать будущего зов.

Б. Пастернак

Вам наверняка известна следующая задача-головоломка.

Сложите шесть спичек так, чтобы они образовали четыре равносторонних треугольника со стороной, равной стороне спички.

Для решения этой задачи надо выйти в пространство и сложить спички в виде пирамиды так, как показано на рисунке 1. То, что невозможно на плоскости, оказывается возможным в пространстве.

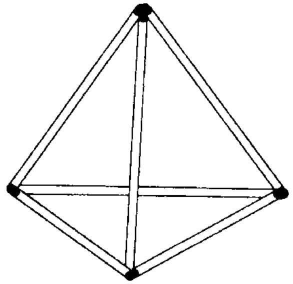


Рис. 1

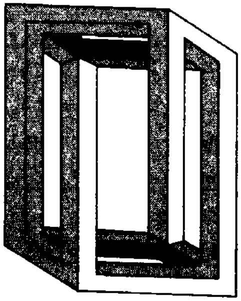
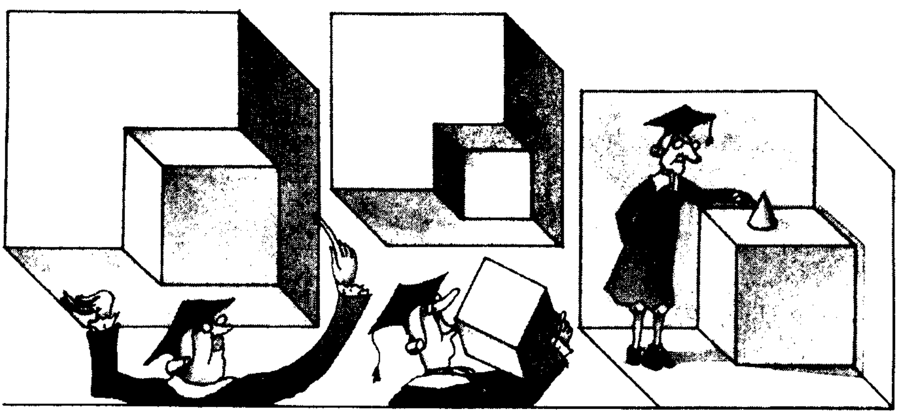


Рис. 2

А теперь посмотрите на рисунок 2. Не надо обладать хорошим пространственным воображением, чтобы понять, что странная



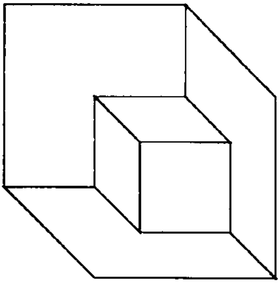


Рис. 3

конструкция, изображённая на этом рисунке, — ***невозможный объект***. Оказывается, и такое возможно.

Планиметрия изучает свойства плоскости и плоских фигур. Но всё это — математические абстракции, объекты, реально не существующие. Стереометрия — раздел геометрии, изучающий свойства реального трёхмерного пространства и трёхмерных тел. Подобно тому как физики изучают свойства идеальных газов и жидкостей, математики изучают идеальные тела, идеальные по форме и размерам, не существующие в природе. Поэтому в какой-то степени стереометрия — «родственница» физики. В определённом смысле математики и физики разделили сферы интересов. Физики изучают цвет, массу, теплопроводность и прочие характеристики. Математики же интересуются лишь формой и размерами тел.

А что изображено на рисунке 3? Одни на этом рисунке увидят угол комнаты, в котором расположен куб, другие — куб с вырезанным углом. Наконец, можно увидеть два куба: большой и «приделанный» к нему маленький. Это изображение следует отнести к категории *неоднозначных*.

Рисунки 2 и 3 специально придуманы. Подобные приёмы нередко используют в своём творчестве художники. Появление таких чертежей при доказательстве теоремы или при решении задачи свидетельствует о неумении делать стереометрические чертежи, о незнании законов изображения тел.

Наиболее удобны для изображения *многогранники*, особенно простейшие: треугольная пирамида, куб, призма и т. д. Обратим внимание на то, что на стереометрическом чертеже изображают все рёбра соответствующего многогранника, при этом видимые рёбра изображают сплошными линиями, а невидимые — прерывистыми (пунктирными).

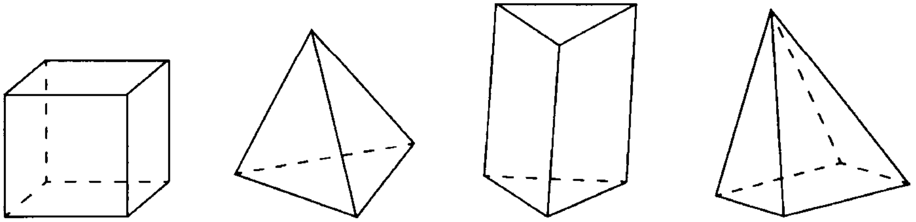


Рис. 4

На рисунке 4 изображены куб, треугольная и четырёхугольная пирамиды и треугольная призма. «Увидеть» эти многогранники нетрудно. А вот на рисунке 5 изображён конус и... Что? Догадаться, что вторая фигура является изображением шара, нелегко. Среди изучаемых в курсе стереометрии основных тел наиболее неудобным для изображения является шар. Поэтому при решении многих задач, в условии которых фигурирует шар, его, как правило, не рисуют. На соответствующем чертеже указывают только его центр и несколько характерных точек.

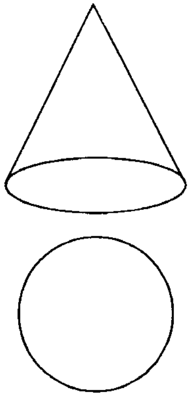


Рис. 5

Задачи, задания, вопросы

1. Сложите 12 спичек так, чтобы они образовали 6 квадратов со стороной, равной спичке.

2. Придумайте несколько различных многогранников. (Эти многогранники должны отличаться не только размерами.)

3. Сколько рёбер может иметь многогранник с пятью вершинами?

4. Школьник нарисовал несколько многогранников, а затем в каждом изображении стёр все внутренние линии, оставив лишь контур. В результате получились многоугольники, изображённые на рисунке 6. Для каждого из этих многоугольников укажите, какой многогранник мог быть нарисован учеником. В каждом случае постарайтесь найти несколько решений.

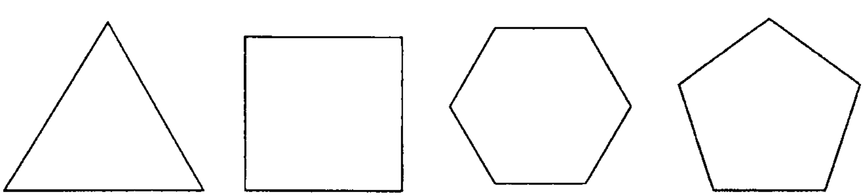
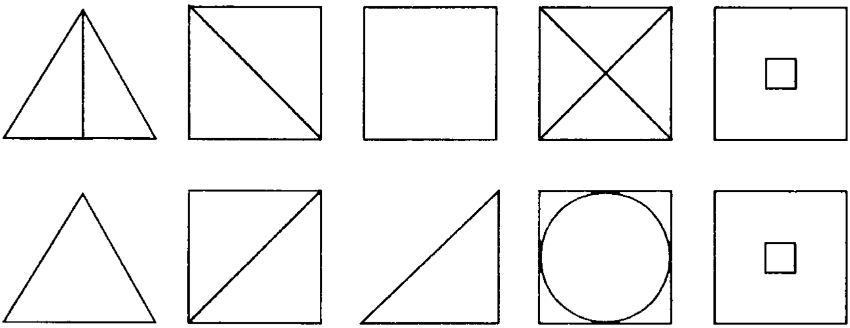


Рис. 6

5. На каждом из рисунков 7, *а —д* изображены вид спереди и вид сверху некоторого тела. Для каждой пары укажите тело, которое может так выглядеть. (Отсутствие на рисунках пунктирных линий означает, что у соответствующего тела нет невидимых рёбер или что эти невидимые линии скрыты за линиями видимыми.)



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 7

6. Придумайте изображение какого-нибудь «невозможного» тела.

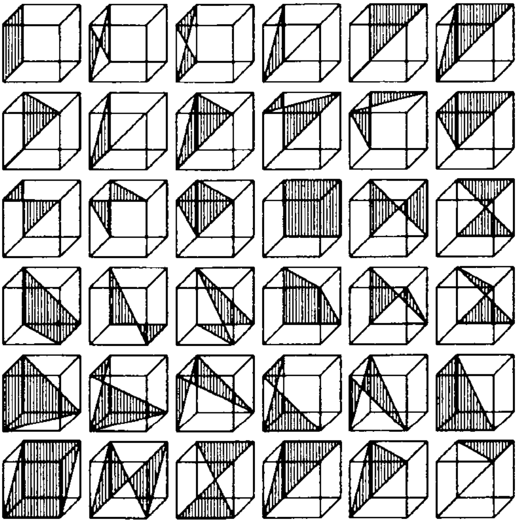
7 (т). Существует ли многогранник с нечётным числом рёбер, все грани которого — многоугольники с чётным числом сторон?

8. Докажите, что существует многогранник с любым числом рёбер, бóльшим 5 и не равным 7.

9 (т). Куб — это шестигранник, у которого имеется 8 вершин и 12 рёбер. Все грани куба — четырёхугольники. Придумайте какой-нибудь шестигранник, у которого 8 вершин и 12 рёбер, причём есть грани с числом сторон, не равным четырём. Возможен ли шестигранник, у которого четыре грани — треугольники, а две оставшиеся — шестиугольники?

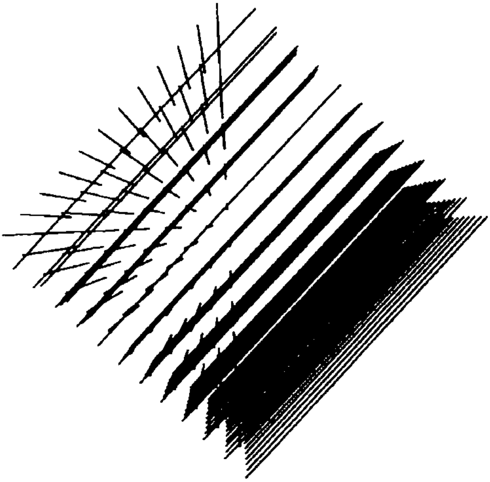
10. Возможно ли, чтобы у многогранника нашлась грань, являющаяся многоугольником с числом сторон большим, чем число граней у многогранника?

10 класс



1

Прямые и плоскости в пространстве

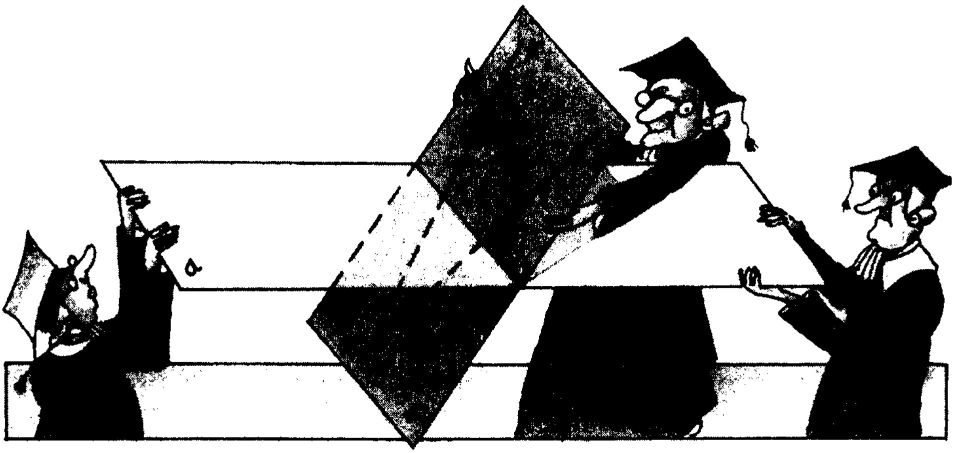


1.1. Основные свойства пространства

Трёхмерное пространство — это реальное пространство, в котором мы живём и свойства которого познаём буквально со дня рождения, в то время как плоскость — двухмерное пространство — есть математическая абстракция, существующая лишь в воображении. Однако при изучении геометрии мы идём от плоскости к пространству. Такая последовательность с точки зрения математики выглядит более удобной и логичной.

Изучение геометрии пространства также, как и геометрии на плоскости, начинают с введения основных неопределяемых объектов и перечисления их свойств. Итак, какие же объекты будем считать неопределяемыми?

Во-первых, как и в планиметрии, в пространстве имеются *точки* и *прямые*. Их свойства ничем не отличаются от свойств, которые мы изучали ранее. Например, как и на плоскости, *через любые две точки в пространстве проходит единственная*



прямая. Но кроме точек и прямых в пространстве имеются ещё и плоскости.

Можно спросить: «Что такое плоскость?» Однако точного ответа на этот вопрос дать невозможно. На самом деле плоскость — это такая же математическая абстракция, как и точка или прямая, о которых мы говорили раньше. С точки зрения наглядных представлений плоскость — это как поверхность бесконечного стола или идеальной стены и т. п. С точки зрения аксиоматической теории плоскость — ещё одно неопределяемое понятие, которое можно лишь описать, перечислить некоторые его свойства. Любой из вас может придерживаться той точки зрения, которая ему больше нравится, или, даже лучше, придумать свою, основываясь на обеих этих позициях. Мы лишь скажем, что главным свойством плоскости является то, что *в каждой плоскости выполняются все утверждения планиметрии*.

Однако, чтобы успешно заниматься стереометрией, нам понадобятся ещё и свойства *самого пространства*.

Сформулируем два основных свойства трёхмерного пространства.

Первое основное свойство

Для любых трёх точек пространства, не лежащих на одной прямой, существует единственная содержащая их плоскость.

Второе основное свойство

Любая плоскость делит пространство на две части — два полупространства.

1.1

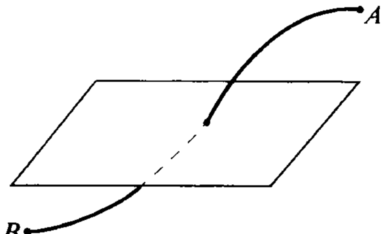


Рис. 8

Как и в случае плоскости, приводимые нами основные свойства пространства не представляют из себя полной системы аксиом. Например, в настоящей аксиоматической теории следовало бы потребовать, что существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Однако выполнение этого утверждения столь очевидно для каждого, что требовать его сейчас было бы излишним. Поэтому мы ограничились лишь самыми необходимыми аксиомами (основными свойствами), выбрав их так, чтобы их и наших наглядных представлений хватило для дальнейшей работы.

Поясним второе свойство. Здесь нетрудно увидеть полную аналогию с соответствующим свойством прямой на плоскости. Любая плоскость разбивает все точки пространства, не лежащие на самой плоскости, на две части, два *полупространства*. При этом если точка A лежит в одной части пространства, а точка B — в другой, то любая линия, соединяющая точки A и B, обязательно пересекает эту плоскость (рис. 8). Если же две точки расположены в одном полупространстве, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает плоскость.

Из приведённых свойств можно сделать несколько важных выводов.

1. Если две точки принадлежат какой-то плоскости, то и вся прямая, проходящая через эти точки, принадлежит этой же плоскости.

2. Любая прямая и точка вне прямой определяют единственную плоскость. (Существует единственная плоскость, содержащая указанные прямую и точку. Эта плоскость определяется данной точкой и любыми двумя точками на прямой.)

3. Существует единственная плоскость, содержащая две заданные пересекающиеся прямые пространства. (Эту плоскость можно задать, например, точкой пересечения прямых и ещё двумя точками — по одной на каждой из прямых.)

Как известно, две плоскости в трёхмерном пространстве пересекаются по прямой. Исходя из сформулированных свойств пространства, это утверждение можно доказать. Сформулируем этот важный факт в виде теоремы.

Теорема 1.1 *(о пересечении двух плоскостей)*

Если две различные плоскости трёхмерного пространства имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Доказательство. Достаточно доказать, что если две различные плоскости имеют одну общую точку, то у них есть по крайней мере ещё одна общая точка. Тогда и вся прямая, проходящая через эти две точки, должна принадлежать обеим плоскостям. Из этого будет следовать утверждение теоремы.

Пусть A — общая точка двух плоскостей α и β (рис. 9). Проведём в плоскости β через A произвольную прямую и возьмём на ней точки K и M по разные стороны от A. Эти точки расположены в разных полупространствах, определяемых плоскостью α. Возьмём в плоскости β произвольную точку L, не лежащую на прямой KM. Из трёх точек K, M, L две лежат в одном полупространстве относительно плоскости α. Пусть это точки K и L. Тогда прямая ML пересекает плоскость α. Обозначим точку пересечения через B. Точки A и B принадлежат обеим плоскостям, значит, как было отмечено выше, плоскости α и β пересекаются по прямой, в данном случае это прямая AB. ▼

Итак, доказан известный и очень важный факт: **две плоскости пересекаются по прямой линии**. Теперь мы можем решать некоторые простейшие задачи, в которых требуется построить сечение данного многогранника плоскостью, определённой тремя точками. Все построения выполняются на *изображении* многогранника. Хотя мы формально ещё не обсуждали, что такое многогранник, мы надеемся, даже уверены, что вы за свою жизнь неоднократно сталкивались на практике с самыми разными многогранными телами, так что вам знакомо, например, что такое куб и как он устроен. Представьте теперь, что куб (или любой другой многогранник, знакомый вам) разрезают на две части плоским разрезом. Тогда задача построения сечения состоит в том, что мы должны сообразить, как устроен этот разрез, где он прохо-

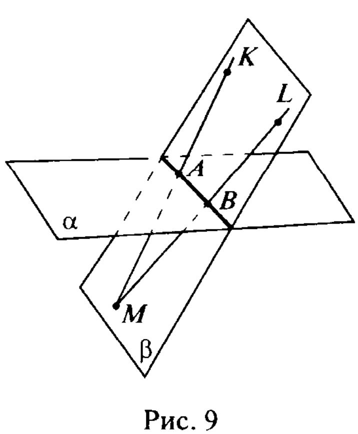


Рис. 9

дит, что пересекает. (Позже мы ещё раз об этом поговорим в § 2.1, 2.2.) При этом мы будем использовать то, что **изображением прямой линии служит прямая линия**.

Начнём со следующей задачи.

Задача. *Построить сечение куба плоскостью, которая проходит через точки K, L, M, расположенные на его рёбрах, как показано на рисунке* 10, *а*.

Замечание. Точнее было бы вместо куба говорить о шестиграннике, все грани которого — четырёхугольники. Никакие другие свойства куба в процессе решения не потребуются.

Решение. Проведём прямую KL и отметим точки её пересечения с продолжениями соответствующих рёбер куба (рис. 10, *б*). Получим ещё две точки, лежащие в плоскости сечения и на продолжениях рёбер куба.

Проводя аналогичным образом прямые в плоскостях других граней куба (рис. 10, *в*, *г*), мы построим всё сечение.▼

В этой задаче при построении сечения был использован метод, который иногда называют **методом «следов»**. Ведь прямые,

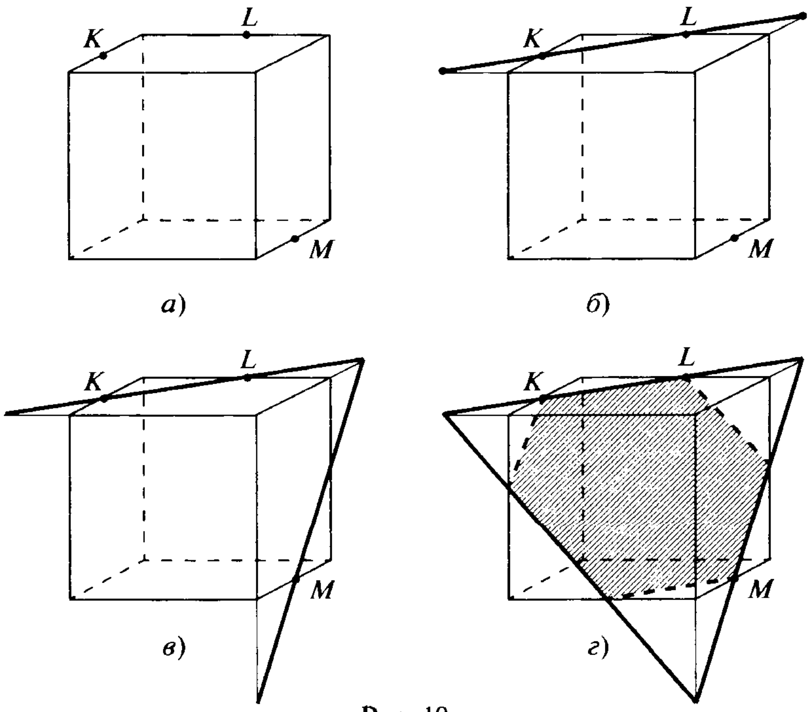


Рис. 10

по которым плоскость сечения пересекает плоскости граней, и точки её пересечения с прямыми, задающими рёбра многогранника, в некотором смысле «следы» плоскости сечения.

Задачи, задания, вопросы

1. Докажите, что три попарно пересекающиеся прямые в пространстве, не проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости.

2. В пространстве выбраны четыре точки. Сколько может быть различных плоскостей, содержащих не менее трёх из данных точек (укажите все возможности)?

3 (в). Пусть A, B, C и D — четыре точки, которые лежат в одной плоскости, причём прямые AB и CD непараллельны, M — произвольная точка пространства, не принадлежащая данной плоскости. Докажите, что прямая, по которой пересекаются плоскости ABM и CDM, проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки M.

4 (т). В пространстве проведено несколько прямых. Любые две из них пересекаются, но при этом данные прямые не проходят через одну точку. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

5. Ученик изобразил треугольную пирамиду и сечение в ней (рис. 11). Возможно ли такое сечение?

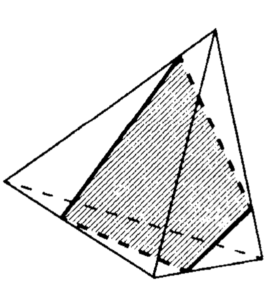
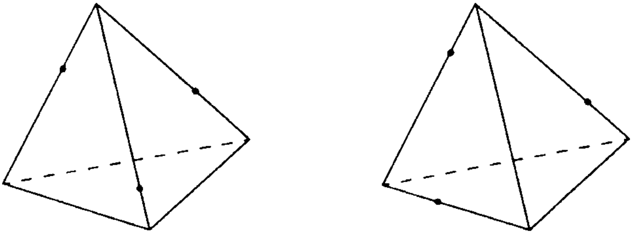
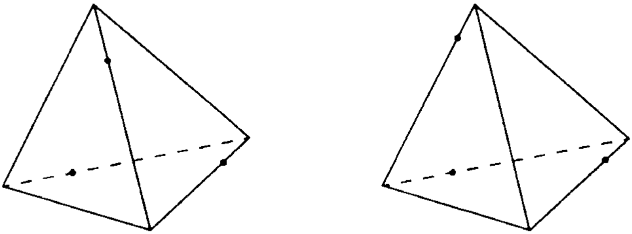


Рис. 11

6 **(в).** На рёбрах треугольной пирамиды взяты три точки, как показано на рисунке 12, *а*, *б*, *в*, *г*. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три отмеченные точки.



а) *б*)

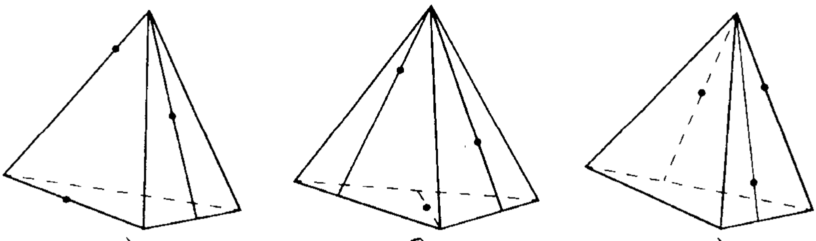


в) *г*)

Рис. 12

Замечание. В этой и других аналогичных задачах все построения делаются на изображении многогранника (в данном случае пирамиды), при этом сначала изображение, данное в учебнике, перерисовывается в тетрадь. (Постарайтесь изображение в тетради сделать достаточно большим, удобным для работы.)

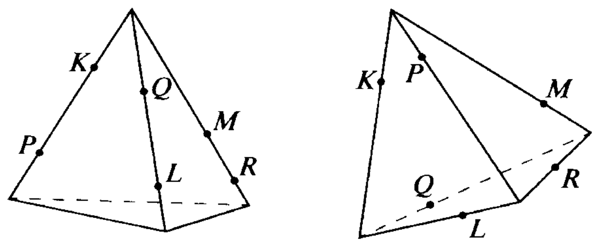
7. На поверхности треугольной пирамиды взяты три точки, как показано на рисунке 13, *а*, *б*, *в*. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через эти три точки.



а) *б*) *в*)

Рис. 13

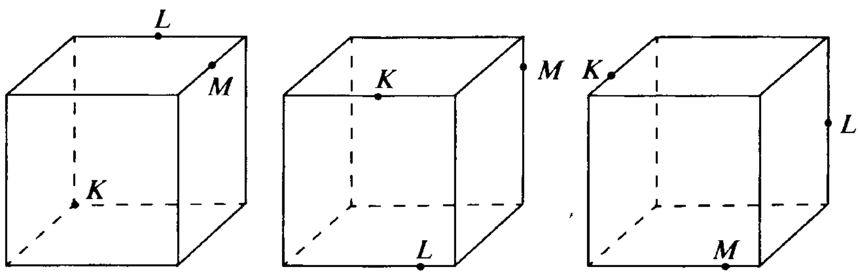
8. На рёбрах треугольной пирамиды взяты точки K, L, M, P, Q, R, как показано на рисунке 14, *а*, *б*. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости KLM и PQR. (См. замечание к задаче 6.)



а) *б*)

Рис. 14

9 (в). На рёбрах куба взяты точки K, L и M так, как показано на рисунке 15, *а, б, в*. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки.



а) *б*) *в*)

Рис. 15

10 (т). На рёбрах AD и BC пирамиды $ABCD$ отмечены точки K и M (рис. 16). Постройте точку пересечения прямой KM с плоскостью, проходящей через точки A, B и середину DC.

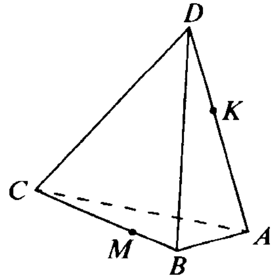


Рис. 16

1.2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

С понятием «параллельность» вы познакомились при изучении планиметрии. Там оно относилось лишь к прямым. Выход в пространство, изменение «статуса» плоскости вынуждает нас не только уточнить определения некоторых понятий, но и расширить область их применения.

Определение 1

Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Определение 2

Прямая и плоскость в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Определение 3

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Как видим, первые два определения расширяют «зону действия» понятия «параллельность», а третье — уточняет старое определение. Ведь в пространстве две прямые могут и не принадлежать одной плоскости.

Определение 4

Две прямые, не принадлежащие одной плоскости, называются скрещивающимися.

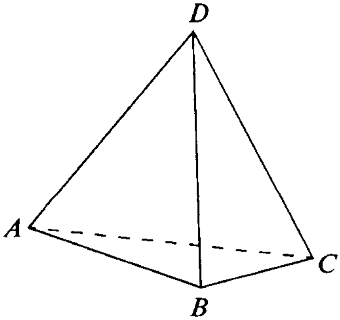


Рис. 17

На рисунке 17 изображена треугольная пирамида $ABCD$. Прямые AB и DC, AC и BD, AD и BC являются скрещивающимися, поскольку точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Таким образом, противоположные рёбра треугольной пирамиды попарно скрещиваются (т. е. они лежат на скрещивающихся прямых).

Сформулируем и докажем несколько теорем о свойствах и признаках параллельности в пространстве.

Теорема 1.2 (*о прямой, параллельной плоскости*)

Если прямая *l* параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через *l* и пересекающая плоскость α, пересекает её по прямой, параллельной *l*.

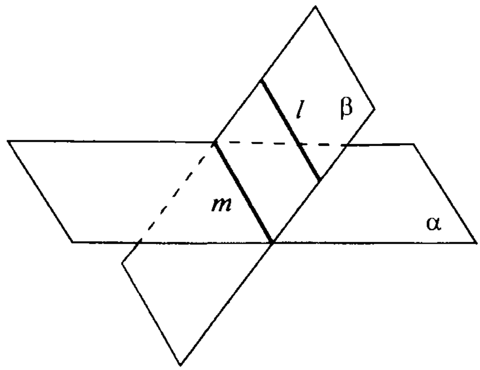


Рис. 18

Доказательство. Пусть плоскость β проходит через прямую l и пересекается с плоскостью α по прямой m (рис. 18). Поскольку прямая l параллельна плоскости α, она не может пересекаться с прямой m. Значит, эти прямые, согласно определению 3, параллельны.▼

Теорема 1.3 (*о двух параллельных плоскостях*)

Если две плоскости параллельны, то любая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает также и вторую, причём получившиеся при пересечении прямые параллельны.

Доказательство. Рассмотрим две параллельные плоскости α и β. Пусть M — некоторая точка плоскости β (рис. 19, *а*). Рассмотрим плоскость λ, проходящую через точку M. Пусть эта

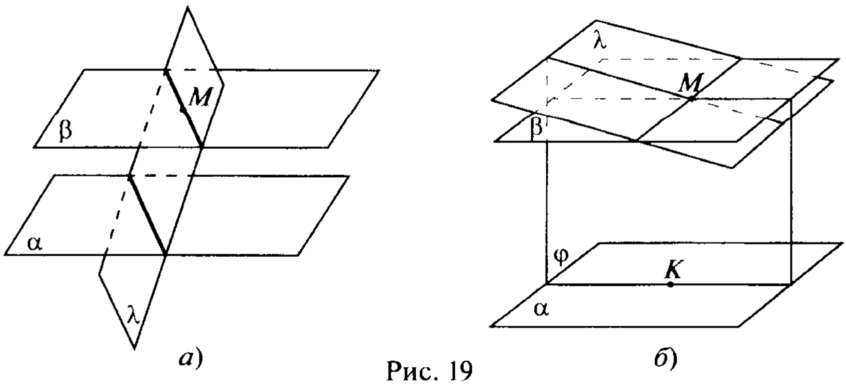


Рис. 19

плоскость пересекает обе данные плоскости. Прямые, по которым плоскость λ пересекает α и β, не могут пересечься, следовательно, являются параллельными.

Осталось доказать, что плоскость λ, если она не совпадает с плоскостью β, непременно пересекается с плоскостью α. Предположим, что это не так (рис. 19, *б*). Возьмём любую точку K в плоскости α и проведём через точки M и K некоторую плоскость φ так, чтобы она не содержала прямой, по которой пересекаются плоскости β и λ. Это всегда можно сделать. Плоскость φ пересекает все три плоскости α, β и λ. В соответствии с только что доказанным получим, что в плоскости φ через точку M проходят две прямые, параллельные одной и той же прямой (прямые, по которым плоскость φ пересекает плоскости β и λ, параллельны прямой, по которой пересекаются плоскости φ и α), что противоречит известному нам свойству плоскости (свойство 4, § 5.1 из учебника 8 класса). Значит, плоскость λ пересекается с плоскостью α.▼

В теореме 1.3 содержится утверждение, которое выделим отдельно.

Через любую точку пространства, не лежащую в данной плоскости, проходит не более одной плоскости, параллельной данной.

Это утверждение аналогично свойству параллельных прямых на плоскости.

Теорема 1.4 (*признак параллельности прямой и плоскости*)

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-то прямой этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

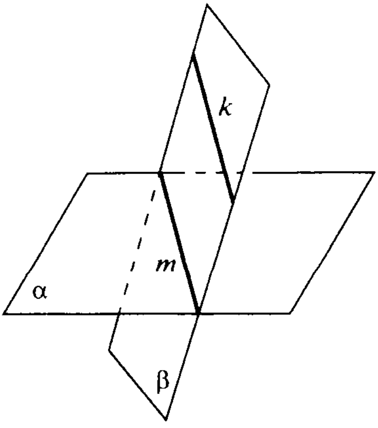


Рис. 20

Доказательство. Пусть прямая k, не лежащая в плоскости α, параллельна прямой m этой плоскости (рис. 20). Согласно определению две прямые k и m лежат в одной плоскости (обозначим эту плоскость через β) и не пересекаются. Это означает, что прямая k не может пересечься с плоскостью α, так как если они пересекаются, то точка их пересечения должна принадлежать плоскости β. Отсюда следует, что прямые k и m пересекаются, что противоречит условию теоремы.▼

Теорема 1.5 *(признак параллельности двух плоскостей)*

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

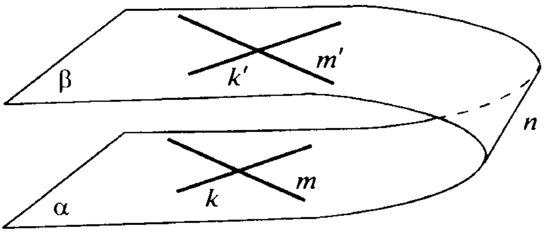
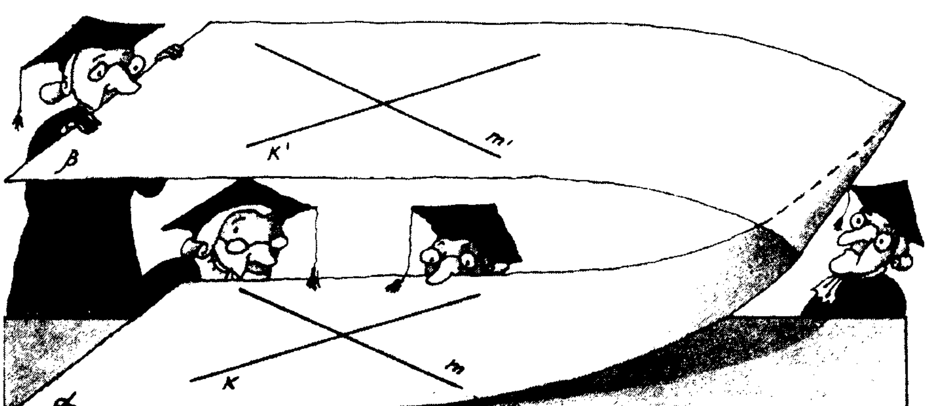


Рис. 21

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые k и m плоскости α соответственно параллельны прямым k' и m' плоскости β (рис. 21). Предположим, что эти плоскости пересекаются. Обозначим прямую, по которой они пересекаются, через n. Эта прямая пересекается хотя бы с одной из заданных прямых плоскости α. Пусть прямая n пересекается с прямой k. Но прямая k параллельна плоскости β (см. теорему 1.4) и не может пересекаться ни с какой прямой этой плоскости. Полученное противоречие доказывает теорему.▼

Теперь мы можем уточнить утверждение, сделанное после доказательства теоремы 1.3.

Через любую точку пространства, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная параллельная ей плоскость.



В самом деле, чтобы провести параллельную плоскость, нам достаточно построить две прямые, проходящие через точку и параллельные двум прямым в данной плоскости.

Теорема 1.6 *(о двух плоскостях, проходящих через параллельные прямые)*

Пусть *a* и *b* — две параллельные прямые. Рассмотрим две пересекающиеся плоскости α и β, проходящие соответственно через прямые *a* и *b* и не совпадающие с плоскостью, содержащей эти прямые. Тогда линия пересечения плоскостей α и β параллельна прямым *a* и *b*.

Доказательство. По признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1.4) прямая a параллельна плоскости β ($a \parallel \beta$), а прямая b параллельна плоскости α ($b \parallel \alpha$). Теперь по теореме 1.2 линия пересечения плоскостей α и β параллельна как прямой a, так и b.▼

Теорема 1.7 *(о транзитивности понятия параллельности для прямых)*

Если каждая из двух различных прямых параллельна третьей, то и сами эти прямые параллельны.

(Понятие «транзитивность» в математике означает перенос некоторого свойства: если рассматриваемое свойство выполняется для пары a и b и для пары b и c, то оно выполняется и для пары a и c. В данном случае a, b и c — это прямые, поэтому рассматриваемое свойство — параллельность прямых. При этом мы дополнительно требуем, чтобы a и c не совпадали.)

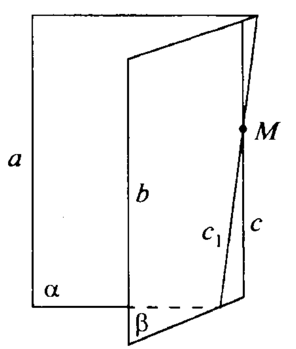


Рис. 22

Доказательство. Пусть три прямые a, b и c таковы, что $a \parallel b$ и $c \parallel b$. Надо доказать, что $a \parallel c$.

Возьмём на прямой c произвольную точку M (рис. 22). Рассмотрим плоскости α и β: плоскость α проходит через прямую a и точку M, плоскость β — через прямые b и c. Обозначим через c_1 линию пересечения α и β. По теореме 1.6 имеем: $c_1 \parallel a$ и $c_1 \parallel b$. Но так как в плоскости β через точку M проходит единственная прямая, параллельная b, то прямая c_1 совпадает с прямой c. Теорема доказана.▼

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. (В этой главе для краткости иногда используется выражение: «$ABCD$ — треугольная пирамида». Здесь важно лишь то, что точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости, проходящей через середины AD, BD и CD.

2 (в). Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что плоскость, проходящая через середины AD, BD и CD, параллельна плоскости ABC.

3. В пространстве проведены две параллельные прямые и пересекающие эти прямые две параллельные плоскости. Докажите, что четыре точки пересечения прямых и плоскостей служат вершинами параллелограмма.

4 (в). Пусть A, B, C и D — четыре точки в пространстве. Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD и DA служат вершинами параллелограмма.

5. Пусть A — некоторая точка пространства, не лежащая в плоскости α, M — произвольная точка плоскости α. Найдите геометрическое место середин отрезков AM.

6. Найдите геометрическое место середин всевозможных отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

7 (в). Пусть A, B, C и D — четыре точки пространства, не лежащие на одной прямой. Докажите, что отрезок, соединяющий середины AB и CD, пересекается с отрезком, соединяющим середины AD и BC. При этом каждый из этих отрезков делится точкой пересечения пополам.

8 (т). В пространстве проведены четыре прямые, не лежащие в одной плоскости, но при этом никакие две из них не являются скрещивающимися. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку либо параллельны.

9 (в). Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

10 (п). Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b. Проведём через a плоскость, параллельную b, а через b — плоскость, параллельную a. Возьмём точку M, не лежащую в проведённых плоскостях. Докажите, что две плоскости, проходящие через прямую a и точку M, а также через прямую b и точку M, пересекаются по прямой, пересекающей a и b. (Этот факт даёт способ построения прямой, проходящей через данную точку пространства и пересекающей две заданные скрещивающиеся прямые.)

11. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ и точку E, не лежащую в его плоскости. Пусть плоскости ABE и CDE пересекаются по прямой l, а плоскости BCE и ADE — по прямой p. Найдите угол между прямыми l и p.

12 (т). Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, параллельная прямым AB и CD. В каком отношении эта плоскость делит медиану к стороне CD в треугольнике ACD?

13. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC, ABD и BCD, делит отрезок BD ($ABCD$ — пирамида)?

14 (тв). В треугольниках ACD и ADB проведены соответственно медианы AM и DN. На этих медианах взяты точки E и F так, что прямая EF параллельна BC. Найдите отношение $EF : BC$ ($ABCD$ — пирамида).

15 (т). В пирамиде $ABCD$ точки M, F и K — середины BC, AD и CD соответственно. На прямых AM и CF взяты точки P и Q так, что PQ параллельна BK. Найдите отношение $PQ : BK$.

16 (т). Известно, что параллелепипед — это шестигранник, ограниченный тремя парами параллельных плоскостей. Покажите, что если сечение параллелепипеда плоскостью является многоугольником с числом сторон, большим трёх, то у этого многоугольника есть параллельные стороны.

17. Может ли сечение параллелепипеда быть правильным пятиугольником?

18. Плоскость проходит через середины рёбер AB и AC пирамиды $ABCD$ и делит ребро BD в отношении 1 : 3. В каком отношении эта плоскость делит ребро CD?

19 (пт). Докажите, что если две пересекающиеся плоскости параллельны некоторой прямой, то и линия их пересечения параллельна этой же прямой.

20 (т). Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 23). На рёбрах AD, A_1D_1 и B_1C_1 взяты соответственно точки M, L и K так, что $B_1K = \frac{1}{3}A_1L$, $AM = \frac{1}{2}A_1L$. Известно, что $KL = 2$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость KLM пересекает параллелограмм $ABCD$.

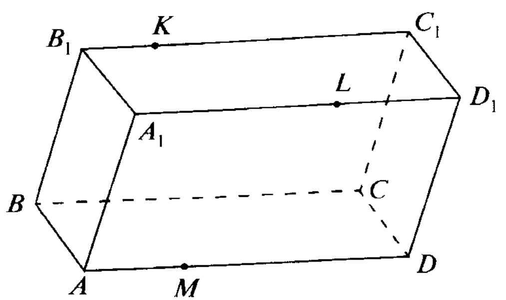


Рис. 23

1.3. Угол между скрещивающимися прямыми

Определение 5

Угол между двумя скрещивающимися прямыми считается равным углу между любыми двумя пересекающимися прямыми, параллельными этим прямым.

Для того чтобы иметь право использовать это определение, надо доказать, что величина угла не зависит от того, где проведены параллельные прямые. Как говорят математики, надо доказать корректность этого определения.

1.3

Теорема 1.8 (*о двух параллелограммах*)

Пусть AA_1B_1B и AA_1C_1C — два параллелограмма. Тогда углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны.

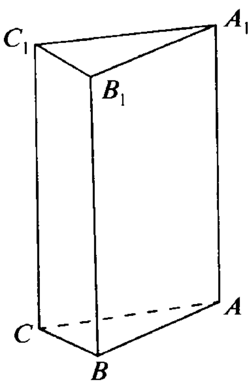


Рис. 24

Доказательство. Из того, что AA_1B_1B и AA_1C_1C — параллелограммы, следуют (рис. 24) равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BB_1 = AA_1 = CC_1$. Кроме того, по теореме 1.7 получаем, что $BB_1 \parallel CC_1$ (они параллельны AA_1). Значит, BB_1C_1C также параллелограмм. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.▼

Из теоремы 1.8 следует, что **если через две различные точки пространства провести по две соответственно параллельные прямые, то углы между этими прямыми будут равны.**

Напомним, что за величину угла между двумя пересекающимися прямыми принимают величину наименьшего из углов, образовавшихся при их пересечении.

Задачи, задания, вопросы

1. В пирамиде $ABCD$ угол ABC равен α. Чему равен угол между прямыми, одна из которых проходит через середины AC и BC, а другая — через середины BD и CD?
2. Докажите, что два угла в пространстве, стороны которых являются соответственно параллельными лучами, либо равны, либо в сумме дают 180°.
3. Пусть ABC — правильный треугольник, а $BCKM$ — параллелограмм. Чему равен угол между прямыми AB и KM?
4. В прямоугольнике $ABCD$ даны стороны: $AB = 3$, $BC = 4$.

   Точка K удалена от точек A, B и C на расстояния $\sqrt{10}$, 2 и 3 соответственно. Найдите угол между прямыми CK и BD.

5 (т). Найдите угол между прямыми AC и BD, если расстояние между серединами отрезков AD и BC равно расстоянию между серединами отрезков AB и CD.

6 (т). Найдите угол между прямыми AC и BD, если известно, что $AC = 6$, $BD = 10$, а расстояние между серединами AD и BC равно 7.

7. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями соседних граней куба.

1.4. Перпендикулярность прямой и плоскости

Исходя из определения угла между скрещивающимися прямыми (определение 5), можно дать определение перпендикулярности двух произвольных прямых: *две прямые называются перпендикулярными, если перпендикулярны какие-то две параллельные им пересекающиеся прямые.*

Определение 6

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

Понятно, что можно рассматривать лишь те прямые плоскости, которые проходят через точку пересечения прямой и плоскости.

Теорема 1.9 (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*)

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум непараллельным прямым этой плоскости.

Доказательство. Из условия теоремы следует: рассматриваемая прямая не может быть параллельной плоскости. Иначе мы нашли бы на плоскости прямую, ей параллельную, которая не могла бы быть перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости. Как было отмечено, можно рассматривать лишь такие прямые плоскости, которые проходят через точку пересечения заданной прямой с плоскостью. Согласно определению надо доказать, что если прямая удовлетворяет условию

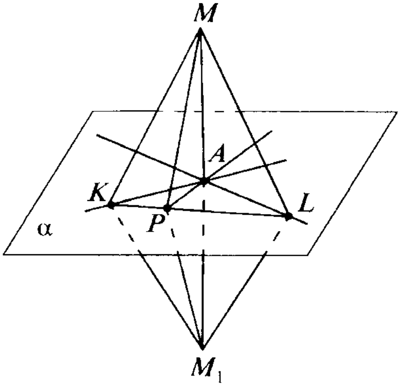


Рис. 25

теоремы 1.9, то она перпендикулярна любой прямой, проходящей через точку её пересечения с плоскостью. Обозначим через A точку пересечения прямой с плоскостью α (рис. 25); M — некоторая точка на этой прямой, AK и AL — две прямые плоскости α, перпендикулярные MA. Проведём через точку A произвольную прямую и обозначим через P точку её пересечения с прямой KL. (Точки K и L можно выбрать так, что KL пересекается с этой третьей прямой, проходящей через A.) Докажем, что $\angle MAP = 90°$.

Возьмём на прямой MA точку M_1 так, что $AM_1 = MA$ (A — середина MM_1). Имеем $KM = KM_1$ (в треугольнике MKM_1 отрезок KA является медианой и высотой). Аналогично $LM = LM_1$. Треугольники KLM и KLM_1 равны по трём сторонам. Отсюда имеем $PM = PM_1$ как соответствующие отрезки в равных треугольниках. Значит, $PA \perp MM_1$, что и требовалось доказать.▼

***Теорема 1.10** (о единственности перпендикуляра к плоскости)*

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

Доказательство. Допустим, что через какую-то точку M проходят две прямые m_1 и m_2, перпендикулярные плоскости α (рис. 26). Проведём через прямые m_1 и m_2 плоскость β. Эта плоскость пересечёт плоскость α по некоторой прямой p. Получаем, что в плоскости β через точку M проходят две прямые m_1 и m_2, перпендикулярные прямой p. Это противоречие доказывает теорему.▼

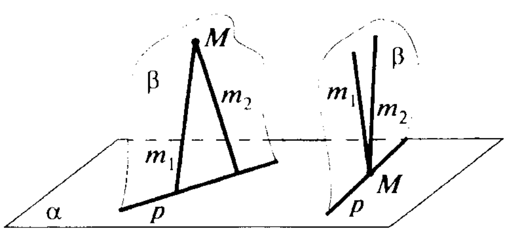


Рис. 26

Замечание. При доказательстве теоремы мы сочли очевидным, что хотя бы одну прямую, перпендикулярную данной плоскости, через заданную точку пространства провести можно. Приведём рассуждение, доказывающее этот факт.

Возьмём произвольную прямую l, а на ней некоторую точку A. Проведём через l две плоскости и в каждой из них восставим к l перпендикуляр в точке A. Рассмотрим плоскость α', содержащую эти перпендикуляры. По теореме 1.9 плоскость α' перпендикулярна прямой l. Совместим плоскость α' с плоскостью α. При этом прямая l перейдёт в прямую n, перпендикулярную α. Проведём теперь через M прямую m, параллельную n. Прямая m и является искомым перпендикуляром к плоскости α.

Определение 7

Проекцией точки M на плоскость α называется точка пересечения с плоскостью α прямой, проходящей через M и перпендикулярной α.

Определение 8

Проекцией фигуры Ф на плоскость α называется фигура Ф′ этой плоскости, образованная проекциями всех точек фигуры Ф.

Теорема 1.11 (*минимальное свойство перпендикуляра*)

Расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка прямой между этой точкой и её проекцией на плоскость.

Другими словами, кратчайшим путём от точки до плоскости является путь по перпендикуляру к этой плоскости.

Доказательство. Пусть M — некоторая точка в пространстве, M_1 — её проекция на некоторую плоскость α, K — любая точка плоскости α, отличная от M_1 (рис. 27). Из определений 6 и 7 следует, что треугольник MM_1K — прямоугольный с прямым углом при вершине M_1. Следовательно, $MM_1 < MK$. Полученное неравенство доказывает теорему. ▼

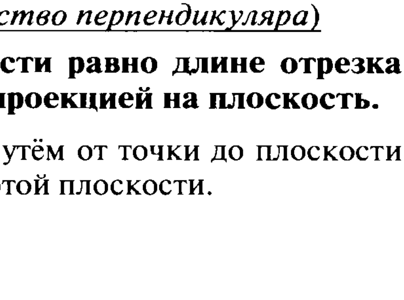


Рис. 27

1.4

Теорема 1.12 *(о двух перпендикулярах к плоскости)*

Две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Доказательство. Рассмотрим две прямые l_1 и l_2, перпендикулярные плоскости α (рис. 28). Пусть M — некоторая точка прямой l_2. Проведём через M прямую l_2', параллельную l_1. Докажем, что прямая l_2' перпендикулярна α. Тогда на основании теоремы 1.10 эта прямая совпадает с l_2.

Пусть m — любая прямая плоскости α. Имеем $m \perp l_1$. А так как $l_2' \parallel l_1$, то и $m \perp l_2'$. (Углы между парами соответственно параллельных прямых равны; см. определение 5.) Следовательно, прямая l_2' перпендикулярна любой прямой плоскости α. Значит, $l_2' \perp \alpha$, что и требовалось доказать.▼

Теорема 1.13 *(основное свойство проекций)*

Пусть точка M лежит на отрезке KL; K', L' и M' — проекции точек K, M и L соответственно на некоторую плоскость α. Тогда точка M' лежит на отрезке $K'L'$, причём $\dfrac{K'M'}{L'M'} = \dfrac{KM}{LM}$.

Доказательство. На основании теоремы 1.12 заключаем, что $KK' \parallel MM' \parallel LL'$ (рис. 29). Точки K, L, M, K', L', M' лежат в одной плоскости, значит, оба утверждения теоремы 1.13 следуют из известной теоремы планиметрии о пропорциональных отрезках.

Из теоремы 1.13, в частности, следует, что проекция прямой, не перпендикулярной плоскости, есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.

Замечание. Проекции, о которых говорится в определениях 7 и 8, называются также **ортогональными** (или **прямоугольны-**

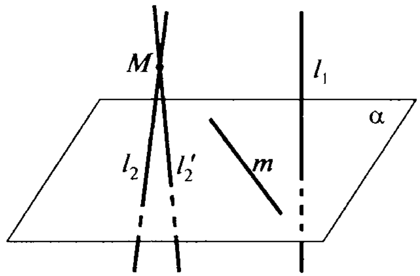


Рис. 28

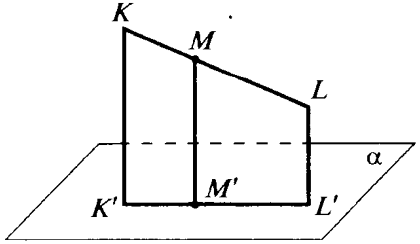


Рис. 29

ми). Ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования.

Определение 7'

Пусть в пространстве заданы прямая l и плоскость α, не параллельные друг другу. Проекцией точки M на плоскость α в направлении l мы будем называть точку пересечения с α прямой, проходящей через M и параллельной l.

Если $l \perp \alpha$, то мы получим ортогональную проекцию точки M на плоскость α, о которой говорится в определении 7. Как несложно понять, параллельное проектирование вдоль любой прямой обладает тем же основным свойством (теорема 1.13), что и ортогональное проектирование: отношение частей проекции отрезка равно отношению самих частей исходного отрезка (если отрезок не проектируется в точку). Даже более того, можно показать, что если $KL \parallel MN$, то $\frac{KL}{MN} = \frac{K'L'}{M'N'}$ (штрихом, как и ранее, обозначаются проекции).

Кроме параллельной проекции на плоскость вдоль прямой, иногда полезно бывает рассмотреть параллельную проекцию на прямую вдоль плоскости.

*Определение 7**

Через произвольную точку A проведём плоскость α', параллельную данной плоскости α; тогда проекция A на прямую l вдоль α — это точка A', в которой l пересекает α'.

Этот вид проекции обладает тем же основным свойством: если M лежит на отрезке KL или если $KL \parallel MN$, то $\frac{KL}{ML} = \frac{K'L'}{M'L'}$.

Для доказательства достаточно заметить, что проекция на прямую может быть представлена как композиция проекции на плоскость, содержащую эту прямую, и проекции на прямую уже на этой плоскости.

В дальнейшем, говоря о параллельном проектировании, мы будем указывать прямую l, задающую направление проектирования. Если же эта прямая не указана, то имеется в виду ортогональное проектирование. Иными словами, выражение «проекция точки M (фигуры Ф) на плоскость α» (без указания прямой l) означает, что речь идёт о проекциях в соответствии с определениями 7 и 8.

Задачи, задания, вопросы

1. Верно ли утверждение, что две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны?

2 **(в).** Докажите, что две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

3 **(в).** Можно ли расположить в пространстве четыре попарно перпендикулярные прямые?

4. Точка A принадлежит плоскости α, проекция отрезка AB на эту плоскость равна 1, длина AB равна 2. Найдите расстояние от B до плоскости α.

5. Точки A и B принадлежат плоскости α, M — такая точка в пространстве, что $AM = 2$, $BM = 5$, и проекция на плоскость α отрезка BM в три раза больше проекции на эту плоскость отрезка AM. Найдите расстояние от M до плоскости α.

6. В пирамиде $ABCD$ имеют место равенства $AB = 2$, $BC = 3$, $BD = 4$, $AD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Докажите, что BD перпендикулярна плоскости ABC.

7 **(п).** Докажите, что проекция точки пересечения медиан треугольника ABC на некоторую плоскость совпадает с точкой пересечения медиан проекции треугольника ABC на ту же плоскость. (Предполагается, что проекции вершин не лежат на одной прямой.)

8 **(в).** Расстояния от концов отрезка до плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

9 **(т).** Расстояния от вершин треугольника до некоторой плоскости равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до той же плоскости. Рассмотрите все возможности.

10. Можно ли дать такое определение прямой, перпендикулярной плоскости: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если её проекция на эту плоскость есть точка»?

11 (т). Расстояния от трёх подряд идущих вершин параллелограмма до некоторой плоскости равны 1, 3 и 5. Найдите расстояние от четвёртой вершины до этой же плоскости. Рассмотрите все возможности.

12. Пусть A, B, C и D — четыре точки в пространстве. Докажите, что если $AB = BC$ и $CD = DA$, то прямые AC и BD перпендикулярны.

13. В пирамиде $ABCD$ медиана к стороне AD в треугольнике ABD равна половине AD, а медиана к стороне CD в треугольнике BCD равна половине CD. Докажите, что BD перпендикулярна плоскости ABC.

14 (т). В пирамиде $ABCD$ даны рёбра: $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 4$. Найдите ребро DA, если известно, что прямые AC и BD перпендикулярны.

15 (т). Пусть A, B, C и D — четыре точки в пространстве. Докажите, что если $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$, то прямые AC и BD перпендикулярны.

1.5. Теорема о трёх перпендикулярах

Известная теорема планиметрии, которую можно коротко сформулировать так: **равные наклонные имеют равные проекции**, верна и в пространстве.

Теорема 1.14 *(о наклонных и их проекциях)*

Если $AM = AK$, то проекции AM и AK на любую плоскость, содержащую M и K, равны.

Обратное утверждение.

Если проекции отрезков AM и AK на некоторую плоскость, содержащую M и K, равны, то $AM = AK$.

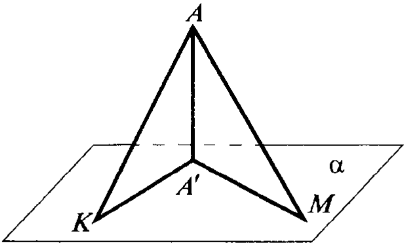


Рис. 30

Доказательство. Пусть A' — проекция A на некоторую плоскость α (рис. 30); $AA'K$ и $AA'M$ — равные прямоугольные треугольники ($\angle AA'K = \angle AA'M = 90°$).

Равенство этих треугольников для первого утверждения теоремы следует из равенства $AK = AM$ (AA' — общая сторона), а для второго, обратного первому, из равенства $A'K = A'M$.▼

Одной из важнейших теорем о свойствах перпендикулярных прямых в пространстве является следующая теорема.

***Теорема 1.15** (о трёх перпендикулярах)*

Если прямая l не перпендикулярна плоскости α и перпендикулярна прямой m этой плоскости, то и проекция l на α (прямая l') также перпендикулярна m.

Обратное утверждение.

Если $l' \perp m$, то и $l \perp m$.

Доказательство. Обозначим через B точку пересечения l с плоскостью α; A — некоторая точка l, отличная от B, A' — проекция A на α. Можно считать, что прямая m проходит через B (рис. 31). Возьмём на прямой m точки K и L так, что B — середина KL.

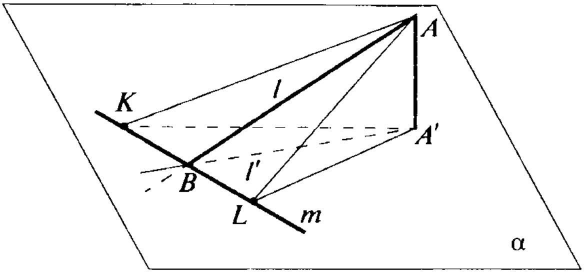


Рис. 31

1. Если $AB \perp KL$ ($l \perp m$), то $AK = AL$. По теореме 1.14 получим $A'K = A'L$. Значит, $A'B \perp KL$ ($l' \perp m$).

2. Обратно, если $A'B \perp KL$ ($l' \perp m$), то $A'K = A'L$. Отсюда имеем $AK = AL$, и значит, $AB \perp KL$ ($l \perp m$).▼

Это не единственный способ доказательства теоремы о трёх перпендикулярах. Мы рекомендуем заинтересованному читателю попробовать провести рассуждение, основываясь непосредственно на определении и признаке перпендикулярности прямой и плоскости, без использования дополнительных построений (подсказка: нужно рассмотреть плоскость $AA'B$).

Задачи, задания, вопросы

1 **(в).** Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC. Докажите, что проекция точки M на плоскость ABC есть центр описанной около ABC окружности.

2. Пусть A — некоторая точка пространства, B — проекция точки A на плоскость α, l — некоторая прямая этой плоскости. Докажите, что проекции A и B на прямую l совпадают.

3 **(в).** Точка M находится на расстоянии a от плоскости α и на расстоянии b от прямой m этой плоскости, M' — проекция M на плоскость α. Найдите расстояние от M' до прямой m.

4 **(в).** Известно, что некоторая точка M в пространстве равноудалена от вершин плоского многоугольника. Докажите, что этот многоугольник является вписанным, причём центром описанной около него окружности является проекция M на плоскость многоугольника.

5 **(в).** Докажите, что геометрическим местом точек, равноудалённых от двух заданных точек пространства, является плоскость, перпендикулярная соединяющему данные точки отрезку и проходящая через середину этого отрезка. (Эта плоскость представляет собой пространственный аналог понятия серединного перпендикуляра к отрезку на плоскости.)

6. В пирамиде $ABCD$ рёбра AD, BD и CD равны 5, расстояние от точки D до плоскости ABC равно 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

7 **(в).** Известно, что некоторая точка M равноудалена от двух пересекающихся прямых m и n. Докажите, что проекция точки M на плоскость, определяемую прямыми m и n, лежит на одной из биссектрис между этими прямыми.

8 **(п).** Точка M равноудалена от трёх прямых AB, BC и CA. Докажите, что проекция точки M на плоскость ABC является центром вписанной окружности либо одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

9. Точка M находится на расстояниях 5 и 4 от двух параллельных прямых m и n и на расстоянии 3 от плоскости, проходящей через эти прямые. Найдите расстояние между прямыми m и n.

10. Прямая l проходит через точку на окружности ω с центром в O и радиусом r. Известно, что проекцией l на плоскость, которая содержит окружность ω, является прямая, касающаяся этой окружности. Найдите расстояние от O до l.

11 (в). Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые AC_1 и BD перпендикулярны.

12. Все попарные расстояния между четырьмя точками в пространстве равны 1. Найдите расстояние от одной из этих точек до плоскости, определяемой тремя другими точками.

13 (т). Докажите, что если проекция одной из вершин треугольной пирамиды на плоскость противоположной грани совпадает с точкой пересечения высот этой грани, то это же имеет место и для любой другой вершины этой пирамиды.

14 (т). Докажите, что если прямая p образует равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

15. Все рёбра треугольной пирамиды равны между собой. Найдите угол между медианой одной из её граней и скрещивающимся с этой медианой ребром пирамиды.

16 (т). Все рёбра треугольной пирамиды равны между собой. Найдите угол между скрещивающимися медианами двух граней этой пирамиды. Сколько решений имеет задача?

1.6. Угол между прямой и плоскостью

Определение 9

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то за угол между прямой и плоскостью принимают угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Напомним, что угол между двумя пересекающимися прямыми равен наименьшему из углов, образовавшихся при их пересечении.

Понятно, что если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью равен 90°.

Угол между прямой и плоскостью наглядно описывается с помощью следующей теоремы.

***Теорема 1.16** (о минимальности угла между прямой и плоскостью)*

Угол между прямой и плоскостью равен наименьшему из углов, образованных рассматриваемой прямой с различными прямыми, лежащими в плоскости.

Доказательство. Пусть прямая l пересекает плоскость П в точке B и не перпендикулярна ей. Возьмём на l некоторую точку A и обозначим через A' проекцию A на П (рис. 32). Проведём через B в плоскости П произвольную прямую, отличную от BA'. Обозначим через A'' проекцию A на эту прямую. Надо доказать, что $\angle ABA'$ меньше $\angle ABA''$. Прямая $A''A'$ есть проекция $A''A$ на плоскость П и по теореме о трёх перпендикулярах (теорема 1.15) $A''A' \perp BA''$. Значит, $BA'' < BA'$. Прямоугольные треугольники BAA' и BAA'' имеют общую гипотенузу BA, а так как $BA'' < BA'$, то $\angle ABA'' > \angle ABA'$. Теорема доказана.▼

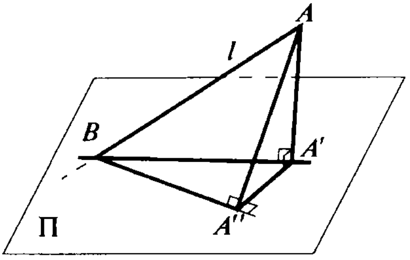


Рис. 32

Задачи, задания, вопросы

1 **(в).** Какие углы образует диагональ куба с его гранями?

2. Прямая l образует угол α с плоскостью p. Найдите длину проекции на плоскость p отрезка длины d, расположенного на прямой l.

3 **(в).** В пирамиде $ABCD$ треугольник ABC — правильный со стороной a, $AD = BD = CD = b$. Найдите косинус угла, образованного прямыми AD, BD и CD с плоскостью ABC.

4 (в). Пусть прямая l не перпендикулярна плоскости α и образует равные углы с пересекающимися прямыми m и n, лежащими в этой плоскости. Докажите, что проекция l на α параллельна одной из биссектрис между прямыми m и n.

5. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через точку A, не принадлежащую плоскости П, и образующие равные углы (отличные от нуля) с этой плоскостью. Найдите геометрическое место точек пересечения этих прямых с плоскостью П.

6. На плоскости П даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пусть M — такая точка в пространстве, что прямые MA, MB и MC образуют равные углы с П. Найдите геометрическое место точек M.

7 (т). Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = a$. На каком расстоянии от плоскости ABC находится точка M, если прямые MA, MB и MC образуют с этой плоскостью углы, равные α?

8 (т). В плоскости П проведены две перпендикулярные прямые. Прямая l образует с этими прямыми углы 45 и 60°. Найдите угол, образованный l с плоскостью П.

9 (т). Проекцией равнобедренного прямоугольного треугольника на плоскость П является правильный треугольник. Найдите угол, образованный гипотенузой данного треугольника с плоскостью П.

1.7. Двугранный угол между плоскостями

Итак, мы установили, что такое угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью. Распространим теперь понятие угла на пары плоскостей.

Аналогом понятия угла на плоскости является понятие двугранного угла в пространстве. Рассмотрим две пересекающиеся плоскости в пространстве. Они (подобно паре пересекающихся прямых на плоскости) делят пространство на четыре части, каждая из которых представляет собой двугранный угол.

Определение 10

Двугранный угол — это часть пространства, заключённая между двумя полуплоскостями, имеющими общую границу.

Полуплоскости, ограничивающие двугранный угол, называются **гранями двугранного угла.**

Общая для граней прямая (граница полуплоскостей) называется **ребром двугранного угла** (рис. 33).

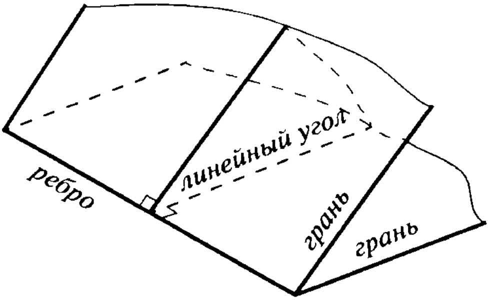
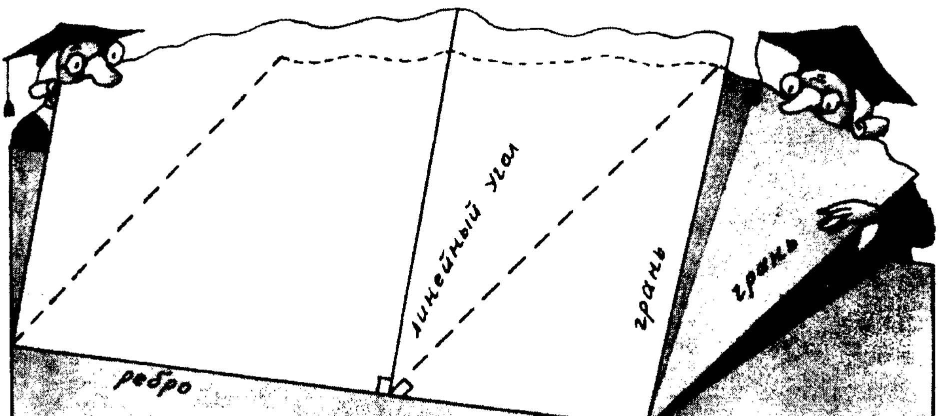


Рис. 33

При пересечении двугранного угла плоскостью, не содержащей его рёбра и не параллельной ребру, образуется обычный (плоский) угол, расположенный в плоскости сечения. Среди таких углов выделим линейный угол двугранного угла.

Определение 11

Линейным углом двугранного угла называется угол, возникший при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру двугранного угла (см. рис. 33).



Другими словами, линейный угол двугранного угла — это плоский угол, образованный двумя лучами, которые лежат в гранях этого двугранного угла и перпендикулярны его ребру.

Из теоремы 1.8 (теоремы о двух параллелограммах) следует, что величина линейного угла двугранного угла не зависит от положения его вершины. Поэтому величина линейного угла двугранного угла может быть использована в качестве характеристики величины самого двугранного угла.

Определение 12

За величину двугранного угла принимают величину его линейного угла.

Выражение «двугранный угол равен α» означает, что величина соответствующего линейного угла равна α. Величина двугранного угла, как правило, не превосходит 180°. Все исключения будут специально оговорены.

Теорема 1.17 *(признак равенства двугранных углов)*

Если у двугранных углов равны линейные углы, то и двугранные углы равны.

Доказательство. Надо доказать, что если у двух двугранных углов равны линейные углы, то их можно совместить. Рассмотрим два двугранных угла. Ребром первого из них является прямая l, второго — прямая l'; угол BAC — линейный угол первого двугранного угла, угол $B'A'C'$ — линейный угол второго угла (рис. 34). По условию $\angle B'A'C' = \angle BAC$. Значит, эти плоские углы можно совместить. Но прямая l перпендикулярна плоскости BAC, а прямая l' перпендикулярна плоскости $B'A'C'$. Так как существует единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости и проходящая через данную точку (теорема 1.10), то после совмещения углов BAC и $B'A'C'$ прямые l и l' совпадают. Значит, совпадут и сами двугранные углы.▼

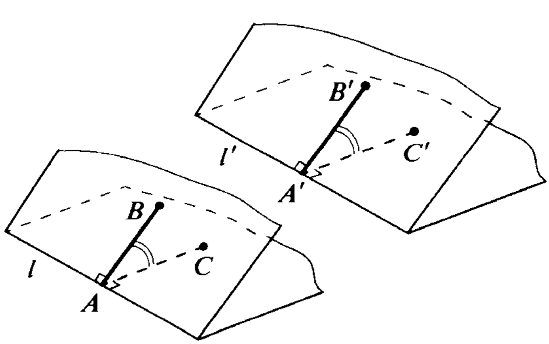


Рис. 34

Отметим, что из данного определения линейного угла следует, что линейный угол двугранного угла можно получить, если провести в его гранях лучи, перпендикулярные его ребру (по одному в каждой грани). Угол между лучами в точности равен линейному углу двугранного угла (при этом лучи могут не иметь общего начала).

Как известно, любой плоский угол имеет биссектрису. Её аналогом для двугранного угла является биссекторная плоскость.

Определение 13

Биссекторной плоскостью двугранного угла называется плоскость, которая делит этот двугранный угол на два равных двугранных угла.

Биссекторная плоскость проходит через ребро двугранного угла, при этом её полуплоскость, лежащую вне двугранного угла, можно не рассматривать. Так что можно говорить о биссекторной полуплоскости. Следующее утверждение вполне очевидно.

Плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и биссектрису какого-то её линейного угла, является биссекторной, и все точки биссекторной плоскости равноудалены от граней двугранного угла.

Определение 14

Угол между двумя плоскостями считается равным наименьшему из четырёх двугранных углов, образовавшихся при их пересечении.

Иногда в качестве синонима словосочетания «угол между плоскостями» используют выражение «угол наклона одной плоскости к другой».

Сделаем два важных, но вполне очевидных замечания (доказательство которых провести самостоятельно в качестве упражнения).

1) Четыре угла, образующиеся при пересечении двух плоскостей, распадаются на две пары равных вертикальных двугранных углов.

2) Угол между плоскостями равен углу между прямыми, им перпендикулярными, т. е. если прямая a перпендикулярна плоскости α, а прямая a' — плоскости α', то угол между a и a' равен углу между α и α'.

Две плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Имеет место следующая теорема.

1.7

Теорема 1.18 (признак перпендикулярности двух плоскостей)

Если одна из двух плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

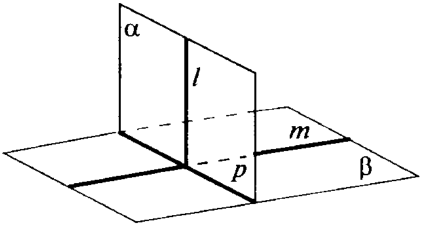


Рис. 35

Доказательство. Пусть плоскость α содержит прямую l, перпендикулярную плоскости β. Обозначим через p линию пересечения этих плоскостей и проведём через точку пересечения прямых l и p в плоскости β прямую m, перпендикулярную p (рис. 35). По условию $l \perp \beta$, значит, $l \perp m$. Таким образом, линейные углы всех двугранных углов, образовавшихся при пересечении плоскостей α и β, — прямые. Следовательно, эти плоскости перпендикулярны.▼

Приведём в заключение ещё одну полезную теорему.

Теорема 1.19 (о площади проекции)

Пусть в одной из двух плоскостей, пересекающихся под углом α, расположена фигура Ф площади S, S' — площадь фигуры Ф′ — проекции этой фигуры на другую плоскость. Тогда $S' = S\cos\alpha$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для случая, когда Ф — треугольник. Пусть это треугольник ABC, одна из сторон которого (обозначим её через AB) лежит на линии пересечения заданных плоскостей (рис. 36, *а*); C' — проекция C на другую плоскость. Проведём в треугольнике ABC высоту CD. По теореме о трёх перпендикулярах $C'D \perp AB$. Значит, $\angle CDC'$ — линейный угол соответствующего двугранного угла, $\angle CDC' = \alpha$. Таким образом, площадь треугольника ABC' равна

$$S_{\triangle ABC'} = \frac{1}{2}AB \cdot DC' = \frac{1}{2}AB \cdot DC\cos\alpha =$$
$$= S_{\triangle ABC}\cos\alpha = S\cos\alpha.$$

Для этого случая теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда Ф — произвольно расположенный треугольник. Можно считать, что одна из вершин треугольника расположена на пересечении плоскостей. Пусть это вершина A треугольника ABC, при этом прямая BC не парал-

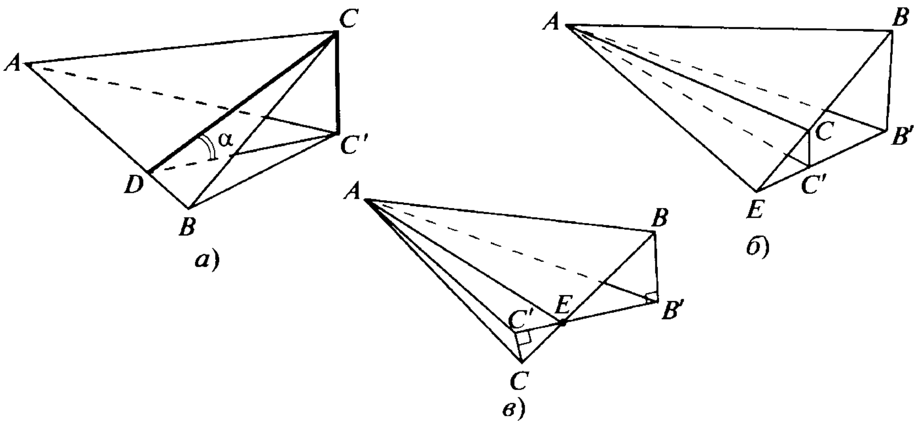


Рис. 36

лельна линии пересечения плоскостей. Обозначим через E точку пересечения прямой BC с прямой, по которой пересекаются данные плоскости. Для треугольников ABE и ACE формула теоремы 1.18 верна. Следовательно, она справедлива и для треугольника ABC (рис. 36, *б*, *в*).

Теперь нетрудно понять справедливость этой формулы для случая, когда Ф — произвольный многоугольник. Ведь его можно разбить на треугольники, для которых она уже доказана. Справедливость этой формулы для произвольной фигуры доказывается предельным переходом: любую фигуру можно сколь угодно точно «приблизить» многоугольниками.▼

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Имеется двугранный угол величины α. На одной из его граней взята точка A на расстоянии a от ребра. Найдите расстояние от A до плоскости другой грани.

2. Обязательно ли параллельны две плоскости, перпендикулярные одной плоскости?

3 (в). Пусть A — некоторая точка в пространстве, A' — проекция A на плоскость П, $AA' = a$. Через точку A проходит плоскость, образующая угол α с плоскостью П и пересекающая плоскость П по прямой l. Найдите расстояние от A' до прямой l.

4 (в). Пусть A — некоторая точка в пространстве, не принадлежащая плоскости П. Рассмотрим всевозможные плоскости, проходящие через A и образующие с этой плоскостью один и тот же угол. Докажите, что все прямые, по которым плоскости, проходящие через A, пересекаются с П, касаются одной окружности.

5. Найдите сумму углов, которые произвольная прямая образует с плоскостью и прямой, перпендикулярной этой плоскости.

6. В пирамиде $ABCD$ угол ABC равен α, проекция точки D на плоскость ABC есть точка B. Найдите величину угла между плоскостями ABD и CBD.

7. Угол между плоскостями равен α. Найдите площадь проекции правильного шестиугольника со стороной l, принадлежащего одной из плоскостей, на другую плоскость.

8. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите площадь проекции треугольника на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный наименьшему углу этого треугольника.

9 (т). Через стороны равностороннего треугольника проведены три плоскости, образующие угол α с плоскостью треугольника и пересекающиеся в точке, удалённой на расстояние d от неё. Найдите радиус окружности, вписанной в данный равносторонний треугольник (см. задание 3).

10 (т). Пусть ABC — равносторонний треугольник. Через прямые AB, BC и CA проходят три плоскости, образующие угол φ с плоскостью ABC и пересекающиеся в точке D_1. Кроме того, через эти же прямые проходят плоскости, образующие угол 2φ с плоскостью ABC и пересекающиеся в точке D_2. Найдите угол φ, если известно, что точки D_1 и D_2 находятся на равном расстоянии от плоскости ABC.

11 (п). Имеются три попарно перпендикулярных отрезка AD, BD и CD. Известно, что площадь треугольника ABC равна S, а площадь треугольника ABD равна Q. Найдите площадь проекции треугольника ABD на плоскость ABC.

12 (в). Найдите двугранные углы пирамиды $ABCD$, все рёбра которой равны между собой.

13 (в). Найдите двугранные углы пирамиды $ABCD$, в которой $AB = BC = CA = a$, $AD = BD = CD = b$.

14 (в). В пирамиде $ABCD$ двугранные углы с рёбрами AB, BC и CA равны α_1, α_2, α_3, а площади треугольников ABD, BCD и CAD равны соответственно S_1, S_2, S_3; S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $S = S_1\cos\alpha_1 + S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3$. (Обратите внимание на то, что некоторые из углов α_1, α_2, α_3 могут быть тупыми.)

15 (в). Из точки M, расположенной внутри двугранного угла величины α, опущены перпендикуляры на его грани. (Перпендикуляры являются лучами, выходящими из M.) Докажите, что угол между этими перпендикулярами равен $180° - \alpha$.

16. Площадь проекции круга радиусом 1 на плоскость П равна 1. Найдите длину проекции этого круга на прямую, перпендикулярную плоскости П.

17 (т). В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AC — прямой, $AB = BC = CD$, $BD = AC$. Найдите двугранный угол при ребре AD.

18. Все плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ — прямые; $DA = 1$, $DB = DC = \sqrt{2}$. Определите двугранные углы этой пирамиды.

19 (т). В плоскости одной из граней двугранного угла взята фигура F. Площадь проекции этой фигуры на другую грань равна S, а площадь её проекции на биссекторную плоскость равна Q. Найдите площадь фигуры F.

20 (т). Плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ — прямые. Обозначим через S_1, S_2, S_3 и Q площади граней ABD, BCD, CAD и ABC, через α, β, γ — двугранные углы с рёбрами AB, BC и CA.

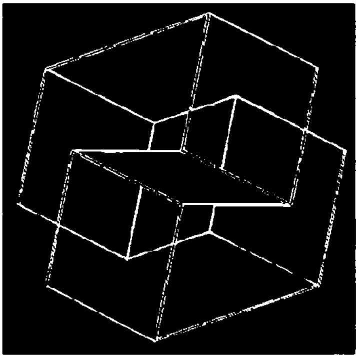
1) Выразите α, β, γ через S_1, S_2, S_3 и Q.

2) Докажите, что $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = Q^2$.

3) Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2

Многогранники



2.1. Изображение многоугольников и многогранников

Среди различных типов твёрдых тел, которые встречаются в природе, имеющих естественное или искусственное происхождение, важную роль играют многогранники. Под **многогранником** будем понимать ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Это высказывание не является точным математическим определением. Мы просто определяем многогранник через общее понятие «тело» — понятие, относящееся скорее к физике, чем к математике. Как ни странно, но дать математически строгое определение многогранника совсем не просто. Для нас в этом курсе вполне достаточно тех наглядных представлений об этом объекте, которое вы могли получить из повседневного опыта. На них мы и будем опираться.

Свойства многогранников (и других тел) будем изучать в основном умозрительно, используя их *изображения на плоскости*.

Мы уже встречались с изображениями многогранников на плоскости и решали задачи, в которых требовалось проделать те или иные построения на этих изображениях. При этом использовались лишь основные свойства плоскостей и прямых, а также тот факт, что изображением прямой линии служит прямая. Само же изображение многогранника было частью условия задачи, и вопрос, каким образом оно было получено, не обсуждался.

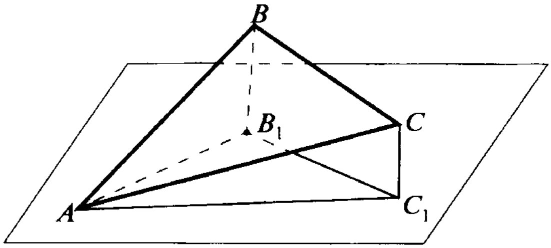
В этой главе мы рассмотрим некоторые основные принципы построения плоских изображений многогранников (а также других тел и фигур). Сформулируем, прежде всего, главный принцип: **плоские изображения пространственных объектов получаются посредством проектирования.** (Иногда математики вместо слова «проектирование» используют немного «старомодное» слово «проецирование», что позволяет избежать путаницы. Ведь термин «проектирование» означает также «составление проектов». Мы же будем употреблять его в смысле «получение проекции».) Так, проекция многоугольника на плоскость является также и изображением этого многоугольника. Из этого следует, что изображением прямой (отрезка) служит прямая (отрезок). Сделаем оговорку: прямая может проектироваться в точку и в этом случае её изображением является точка. Изображением параллельных прямых в общем случае служат параллельные прямые. (Параллельные прямые могут спроектироваться, правда, в одну прямую и даже в две точки.) Плоский многоугольник при проектировании (изображении), как правило, переходит в многоугольник с тем же числом сторон. (В частных случаях плоский многоугольник при проектировании может перейти в отрезок — вырожденный многоугольник.)

Из известных свойств проектирования следует, что **изображением параллелограмма является также параллелограмм** (возможно, вырожденный, т. е. отрезок).

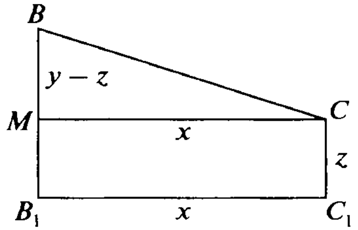
Полезно знать, что **изображением данного треугольника может служить треугольник, подобный любому треугольнику**. В частности, любой треугольник можно спроектировать в правильный треугольник, т. е. правильный треугольник может служить изображением любого треугольника. Решим следующую задачу.

Задача*. *Найти сторону правильного треугольника, являющегося проекцией треугольника со сторонами* $\sqrt{6}$, 3, $\sqrt{14}$. (Напомним ещё раз, что если направление проектирования не указано, то это означает, что речь идёт об ортогональном проектировании — проектировании в направлении, перпендикулярном плоскости.)

2.1



а)



б)

Рис. 37

Решение. Пусть треугольник ABC, в котором $AB = \sqrt{14}$, $BC = \sqrt{6}$, $CA = 3$, проектируется на плоскость П и его проекцией является правильный треугольник. Будем считать, что вершина A лежит в этой плоскости. Тогда вершины B и C, поскольку AB — наибольшая сторона треугольника, а проекции всех сторон равны, должны располагаться по одну сторону от плоскости П.

Обозначим их проекции через B_1 и C_1 (рис. 37, *а*). Треугольник AB_1C_1 — правильный. Обозначим его сторону через x. Положим $BB_1 = y$, $CC_1 = z$. Из прямоугольного треугольника ABB_1 имеем: $AB^2 = x^2 + y^2 = 14$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 находим: $AC^2 = x^2 + z^2 = 9$. Рассмотрим трапецию BB_1C_1C (рис. 37, *б*). Проведём $CM \parallel B_1C_1$. Треугольник BMC — прямоугольный, $MC = x$, $BM = |y - z|$, $BC = \sqrt{6}$. Имеем $x^2 + (y - z)^2 = 6$. Таким образом, получаем систему:

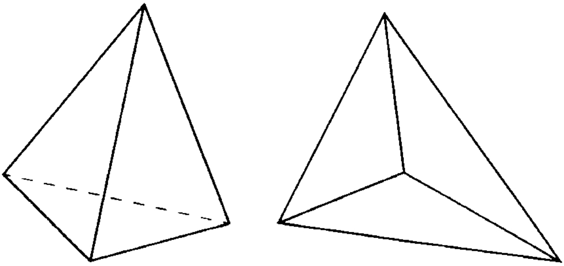
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 14, \\ x^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + (y - z)^2 = 6. \end{cases}$$

Вычитая второе и третье уравнения из первого, получаем:

$$y^2 - z^2 = 5,\ 2yz - z^2 = 8.$$

Выразим из последнего уравнения y через z и подставим полученное значение в предыдущее уравнение. В результате получим биквадратное уравнение $3z^4 + 4z^2 - 64 = 0$. Откуда $z^2 = 4$, $z = 2$. Далее находим $y = 3$, $x = \sqrt{5}$.

Ответ. Сторона треугольника равна $\sqrt{5}$. ▼



а) б)

Рис. 38

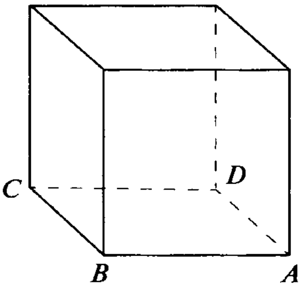


Рис. 39

Перейдём к рассмотрению многогранников. Напомним, что под многогранником мы понимаем ограниченное тело, поверхность которого образована из конечного числа плоских многоугольников, называемых *гранями* многогранника. Граница грани состоит из отрезков прямых — *рёбер* многогранника. Каждое ребро принадлежит двум соседним граням. Концы рёбер — *вершины* многогранника.

Изображение многогранника состоит из изображений его рёбер (полученных посредством параллельного проектирования). При этом все рёбра делятся на два типа: *видимые* и *невидимые*. (Представим себе, что параллельно направлению проектирования идут лучи света. Поверхность многогранника при этом «разделится» на две части: освещённую и неосвещённую. Видимыми являются рёбра, расположенные на освещённой части.) Видимые рёбра изображают сплошными отрезками, а невидимые — пунктирными.

Так, изображением треугольной пирамиды обычно является либо выпуклый четырёхугольник, в котором проведены диагонали (рис. 38, *а*), причём из них одна пунктирная, либо треугольник, вершины которого соединены с некоторой точкой внутри пирамиды (рис. 38, *б*). При этом все отрезки, выходящие из внутренней точки, могут быть как пунктирными, так и сплошными.

На основании общих принципов построения изображений многогранников можно сформулировать ряд конкретных практических рекомендаций, которым стоит следовать при построении изображений некоторых наиболее часто встречающихся многогранников. Например, типичным является изображение куба, представленное на рисунке 39. На этом рисунке $\angle ABC = 135°$, $AB = 2BC$.

Задачи, задания, вопросы

1. Изобразите несколько (три или четыре) известных многогранников (куб, пирамиду и др.).

2. Может ли треугольник быть изображением многогранника (никаких линий, кроме сторон треугольника, на изображении нет)?

3. Все рёбра пирамиды $ABCD$ равны между собой. Нарисуйте изображение этой пирамиды, полученное в результате проектирования: а) на плоскость ABC; б) на плоскость, перпендикулярную AB; в) на плоскость, параллельную AB и CD.

4. Придумайте какой-нибудь многогранник, изображением которого служит квадрат с проведёнными диагоналями.

5 (в). Нарисуйте изображение куба, полученное в результате проектирования этого куба на плоскость, перпендикулярную:

а) одному из его рёбер;

б) диагонали одной из граней;

в)(т) диагонали куба.

6. На рисунке 40 приведены два изображения одного и того же треугольника, при этом на первом из них отмечена точка M_1, соответствующая некоторой точке M исходного треугольника. Постройте на втором изображении точку M_2, соответствующую той же точке M.

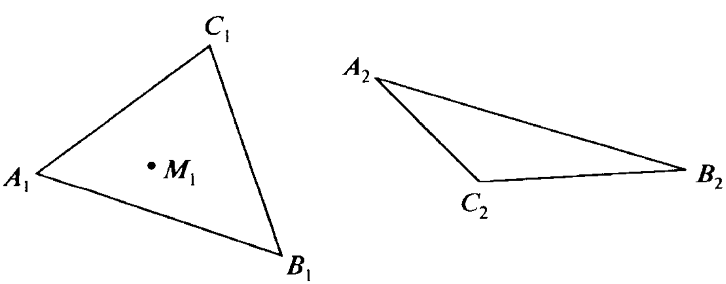


Рис. 40

7 (т). Возможен ли многогранник, соответствующий изображению, приведённому на рисунке 41? (Невидимых рёбер нет, общее число вершин 6, граней 5, рёбер 9.)

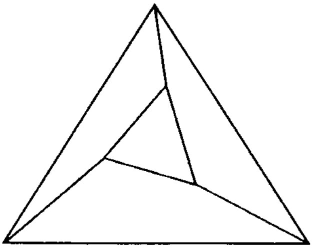
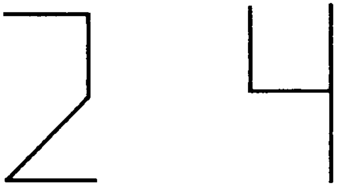


Рис. 41

8 (т). Придумайте пространственную фигуру, составленную из отрезков, которая при проектировании на две перпендикулярные плоскости выглядела так, как на рисунке 42, *а*, *б*.



а) *б*)

Рис. 42

9. На плоскости отмечены три точки, служащие изображением трёх последовательных вершин правильного шестиугольника. Постройте изображения остальных его вершин.

10 (т). Имеется изображение треугольника и центра описанной около него окружности. Постройте изображение точки пересечения высот этого треугольника.

11. На плоскости нарисована линия, которая является изображением окружности. Постройте изображение центра этой окружности.

12. На плоскости дано изображение четырёхугольника $ABCD$ и точки M, не лежащей в его плоскости. Постройте изображение прямой, по которой пересекаются плоскости ABM и CDM.

2.2. Построения на изображениях

Метод «следов» и вспомогательных плоскостей

Основной тип задач, которые будут рассматриваться в этом параграфе, — это задачи на построение сечений многогранников. Как правило, плоскость задаётся тремя принадлежащими ей точками. От того, какие точки плоскости сечения заданы, во многом зависит сложность задачи. Рассмотрим, например, задачу на построение сечения в треугольной пирамиде.

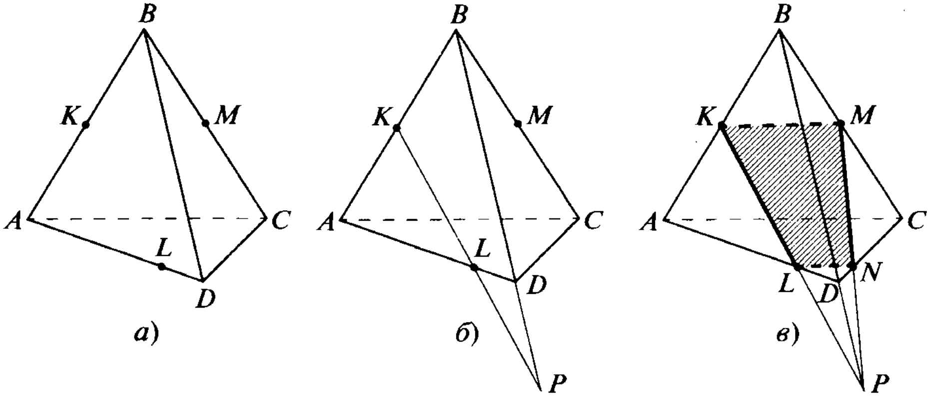
Задача 1. *Построить сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M* (рис. 43, *а*; 44, *а*; 45, *а*).

Решение. С подобными задачами мы уже встречались (см. задания 3 и 4 к § 1.1). Достаточно просто эта задача решается в случае, изображённом на рисунке 43, *а*. Проводим в плоскости ABD прямую KL («след» плоскости сечения). Обозначим через P точку пересечения KL с BD (рис. 43, *б*). (Случай, когда $KL \parallel BD$, рассмотрите отдельно.) Затем проводим прямую PM, получаем точку N как пересечение PM и DC и достраиваем сечение (рис. 43, *в*).

Несколько труднее случай, изображённый на рисунке 44, *а*. (Здесь точки K и M лежат в гранях ABD и BCD, а точка L — на ребре AC.) Сразу построить «след» плоскости сечения в какой-то из граней нельзя. Рассмотрим вспомогательную плоскость BMK. Строим в этой плоскости прямую KM («след» сечения). Обозначим через P точку пересечения прямых KM и EF (рис. 44, *б*). Точка P лежит в плоскости сечения и в плоскости ADC. Но в этой же плоскости лежит и точка L. Проводя прямую LP — «след» сечения в плоскости ADC, получаем точку N (рис. 44, *в*) и достраиваем сечение.

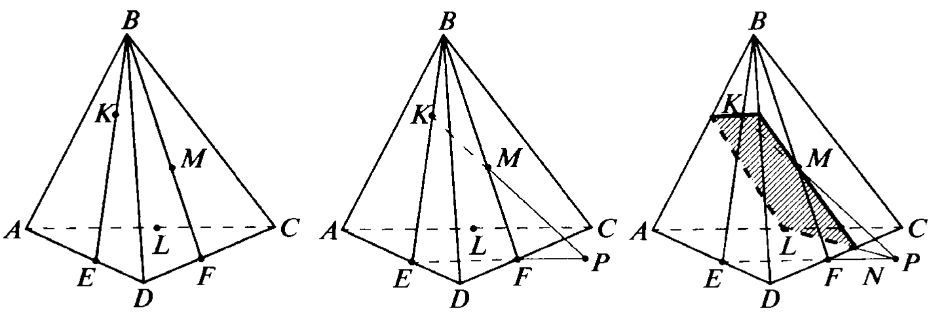
Рассмотрим общий случай, когда все три точки, задающие сечение, лежат в плоскостях граней, но не на рёбрах пирамиды (рис. 45, *а*, *б*, *в*). Как и в предыдущем случае, проведём вспомогательную плоскость DKM, которая пересекает рёбра AB и BC в точках E и F. Построив «след» KM плоскости сечения на этой вспомогательной плоскости, найдём точку пересечения KM и EF — точку P. Точка P, как и L, лежит в плоскости ABC, и можно провести прямую, по которой плоскость сечения пересекает плоскость ABC («след» сечения в плоскости ABC). Теперь легко построить и всё сечение (см. рис. 45, *б*, *в*).▼

*****Используя вспомогательные плоскости, можно строить сечения, «не выходя» за пределы многогранника. Рассмотрим ещё раз случай, изображённый на рисунке 43, *а*.



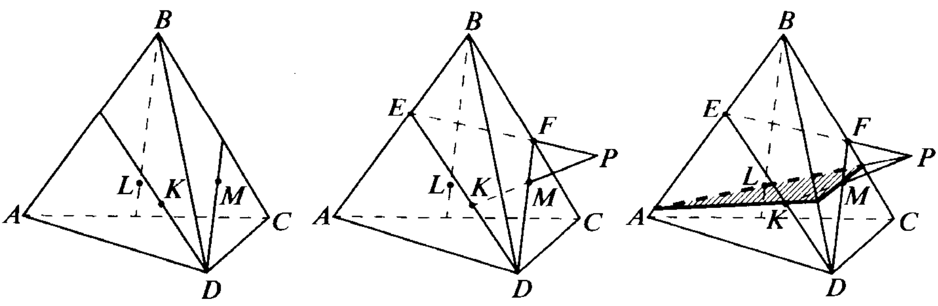
а) *б*) *в*)

Рис. 43



а) *б*) *в*)

Рис. 44



а) *б*) *в*)

Рис. 45

2.2

Последовательность построения:

1) проведём вспомогательную плоскость BLC и в ней отрезок LM (этот отрезок принадлежит плоскости сечения, рис. 46, *а*);

2) проведём ещё одну вспомогательную плоскость DCK и построим точку пересечения BL и DK — точку E. Эта точка принадлежит обеим вспомогательным плоскостям (рис. 46, *б*);

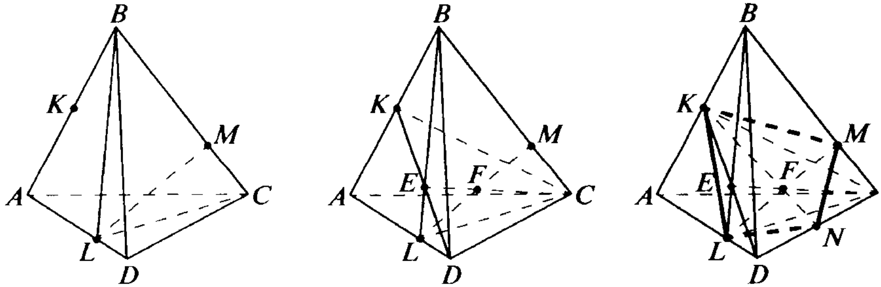
3) найдём точку пересечения отрезков LM и EC (эти отрезки лежат в плоскости BLC, рис. 46, *в*) — точку F. Точка F лежит в плоскости сечения и в плоскости DCK;

4) проведём прямую KF и найдём точку пересечения этой прямой с DC — точку N (точка N принадлежит сечению). Четырёхугольник $KLNM$ — искомое сечение.

Можно поступить иначе. Начнём с конца. Допустим, что по точкам K, L и M построено сечение $KLMN$ (рис. 47). Обозначим через F точку пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$. Проведём прямую DF и обозначим через F_1 её точку пересечения с гранью ABC. Точка F_1 совпадает с точкой пересечения прямых AM и CK (F_1 одновременно принадлежит плоскостям AMD и DCK). Точку F_1 легко построить. Далее строим точку F как точку пересечения DF_1 и LM. Затем находим точку N.

Рассмотренный приём иногда называют **методом внутреннего проектирования**. (В данном случае речь идёт о *центральном проектировании*. Четырёхугольник $KMCA$ есть проекция четырёхугольника $KMNL$ из точки D. При этом точка пересечения диагоналей $KMNL$ — точка F — переходит в точку пересечения диагоналей четырёхугольника $KMCA$ — точку F_1.) Этот метод можно считать разновидностью метода следов и вспомогательных плоскостей.

Рассмотрим теперь ещё раз случай, когда точки K, L, M, задающие сечение, принадлежат граням пирамиды (рис. 48).



а) *б*) *в*)

Рис. 46

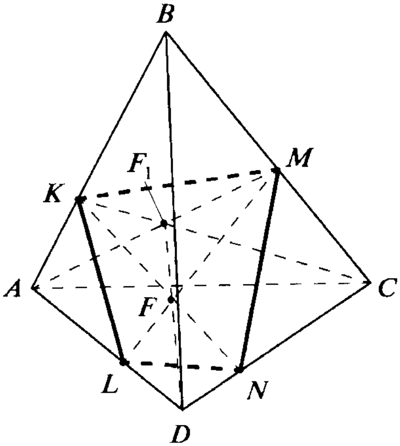


Рис. 47

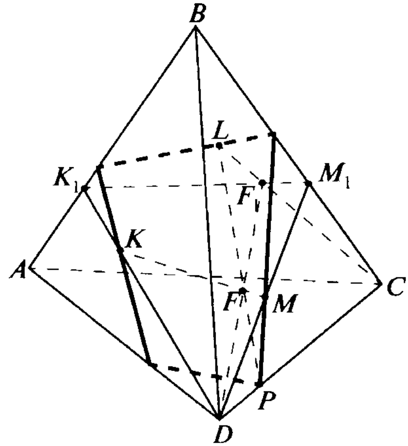


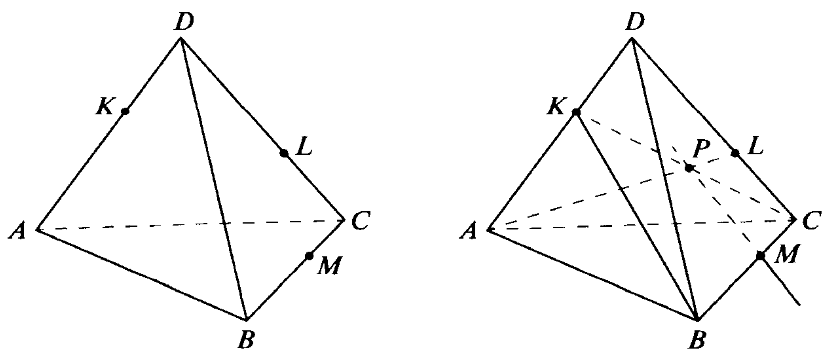
Рис. 48

Допустим, что сечение построено, причём плоскость сечения пересекает ребро DC в точке P. Обозначим через F точку пересечения KM и LP. Спроектируем все эти точки из D на ABC. Точки K и M переходят в точки K_1 и M_1 (они легко находятся), точка P переходит в точку C, точка F — в точку F_1, которая является точкой пересечения K_1M_1 и LC. Строим точку F_1, затем точку пересечения KM и F_1D — точку F и, наконец, точку пересечения LF и DC — точку P. ▼

Решим ещё одну задачу другого типа.

Задача 2. *На рёбрах AD, DC и BC пирамиды $ABCD$ взяты точки K, L и M* (рис. 49, *а*). *Построить изображение прямой, проходящей через точку M и пересекающей прямые BK и AL.*

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть имеются две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и точка M. Тогда прямая, проходящая через точку M и пересекающая прямые l_1 и l_2, является линией



а) Рис. 49 *б*)

пересечения двух плоскостей: одна проходит через прямую l_1 и точку M, а другая — через l_2 и M. В самом деле, эта прямая содержится в обеих этих плоскостях, так как в каждой из них лежит точка M и ещё одна точка этой прямой — та, в которой она пересекает прямую l_1 (или l_2).

Решение. Итак, надо построить прямую, по которой пересекаются плоскости BMK и AML. Для этого достаточно построить ещё одну, отличную от M, точку пересечения этих плоскостей. Подходит, например, точка пересечения KC и AL — точка P (рис. 49, *б*). Если окажется, что прямая PM параллельна BK, то задача не имеет решения.▼

Задачи, задания, вопросы

1. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три отмеченные точки (рис. 50, *а*, *б*, *в*, *г*). Если отмеченная точка находится не на ребре, то она лежит внутри видимой грани пирамиды.

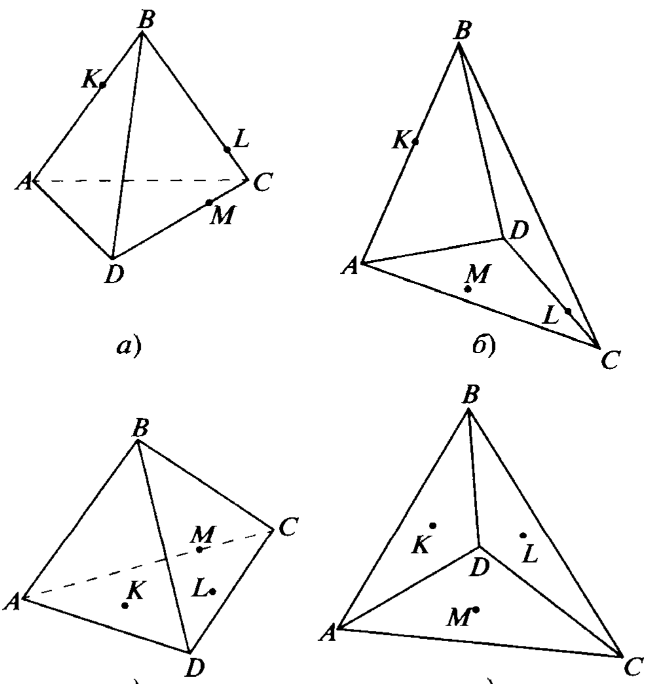


Рис. 50

2. Площадь треугольника ABC равна 2. Чему равна площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AD, BD и CD?

3. Ребро BD пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ADC. Докажите, что сечением этой пирамиды плоскостью, проходящей через D и середины AB и BC, является треугольник, подобный треугольнику ABC. Чему равен коэффициент подобия?

4. Докажите, что сечением пирамиды $ABCD$ плоскостью, параллельной рёбрам AC и BD, является параллелограмм, причём для одной такой плоскости этот параллелограмм будет ромбом. Чему равна сторона этого ромба, если $AC = a$, $BD = b$?

5. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 51). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки (выберите их самостоятельно), лежащие соответственно на рёбрах:

а)(в) AB, AD, DD_1;
б)(в) AD, BC, B_1C_1;
в) AD, D_1C_1, BB_1;
г) AD, AB и в грани DD_1C_1C;
д) AA_1 и гранях DD_1C_1C и BB_1C_1C.

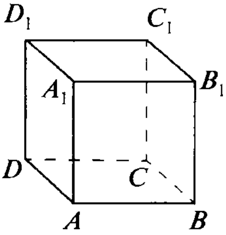


Рис. 51

6. Изобразите пирамиду $ABCD$, отметьте на рёбрах AB, CB и DB точки K, L и M соответственно. Постройте:
а) прямую, по которой пересекаются плоскости CDK и MLA;
б) точку пересечения плоскостей ACM, CDK и ADL;
в) точку пересечения плоскостей AML, CKM и DKL.

7 (т). Изобразите пирамиду $ABCD$, отметьте на её рёбрах AB, BC, CD, DA, BD и AC точки K, L, M, P, N и Q соответственно.
Постройте:
а) прямую, по которой пересекаются плоскости KLM и PNQ;
б) точку пересечения плоскостей ALM, CNP и DKQ.

8 (в). Изобразите пирамиду $ABCD$, отметьте на ребре AB точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной BC и AD.

9 (т). Изобразите пирамиду $ABCD$, отметьте на рёбрах CD и AB точки K и M. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K и M и параллельной AD.

10 (т). Изобразите треугольную пирамиду, отметьте в плоскостях трёх её граней по точке и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через эти три точки.

11 (т). На плоскости проведены три луча m, n, p с общим началом и отмечены три точки A, B, C (рис. 52). Постройте треугольник MNP, вершины которого расположены на лучах (M — на m, N — на n, P — на p), а стороны MN, NP, PM проходят соответственно через точки A, B, C.

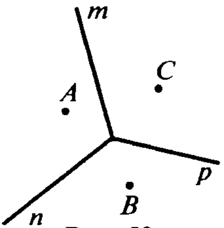


Рис. 52

2.3. Выпуклые многогранники

Мы не давали строгого определения понятия «многогранник». Более того, у разных людей (в том числе и учёных) могут быть разные представления о том, какие тела являются многогранниками, а какие — нет. Так, на рисунке 53 имеются тела

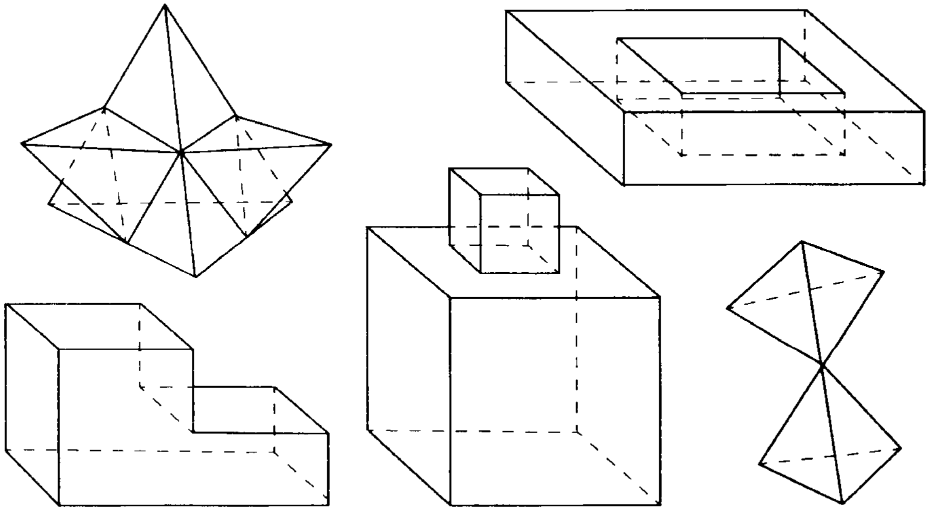


Рис. 53

(какие?), которые, бесспорно, являются многогранниками. Но по поводу некоторых из них могут быть разные мнения. Всё зависит от точки зрения, которой придерживаются учёные.

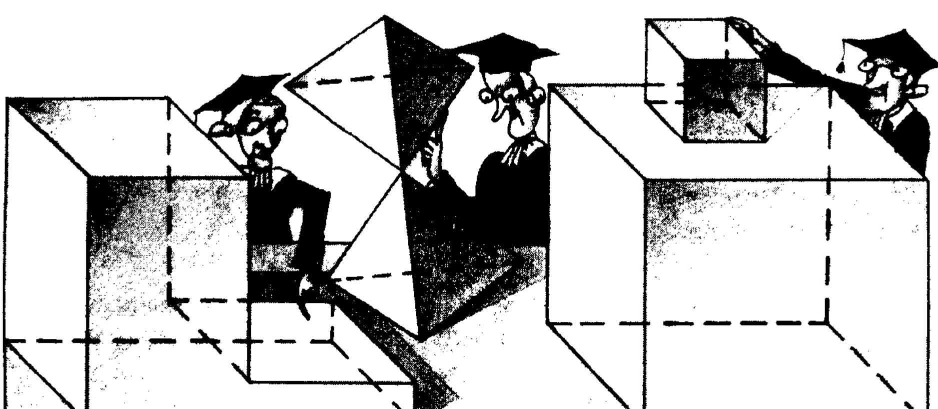
Среди множества произвольных многогранников выделим важный вид: **выпуклые многогранники**. Именно эти многогранники мы и будем изучать в первую очередь. Выпуклый многогранник не только всегда можно легко «узнать», но и дать этому понятию совершенно чёткое определение.

Определение 15

Выпуклым многогранником называется ограниченная часть пространства, представляющая собой пересечение конечного числа полупространств. При этом существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости, принадлежащие указанной части пространства.

Как видим, выпуклый многогранник определяется через понятие «полупространство», которое является одним из основных, первоначальных неопределяемых понятий стереометрии (см. второе основное свойство, гл. 1, § 1.1).

Поясним данное определение. Термин «ограниченный» («ограниченная») означает, что расстояние между любыми двумя точками многогранника ограничено, т. е. не превосходит некоторой определённой величины. «Пересечение» двух (или более) множеств представляет собой совокупность точек, принадлежащих сразу всем этим множествам (в определении этими множествами являются полупространства). Вторая фраза определения исключает случаи вырождения, когда указанное пересечение



превращается (вырождается) в плоский многоугольник, отрезок, точку или пустое множество.

Понятие выпуклости — одно из важнейших понятий геометрии. Выпуклые многогранники — только одна из разновидностей выпуклых фигур (тел).

Определение 16

Фигура (тело, множество) называется выпуклой, если для любых двух точек, принадлежащих фигуре, отрезок, соединяющий эти две точки, также принадлежит фигуре (телу, множеству).

Возникает естественный вопрос. Почему выпуклый многогранник, согласно определению 15, является выпуклым в смысле определения 16? Этот факт следует из приведённой ниже общей теоремы.

Теорема 2.1 (*о пересечении выпуклых множеств*)

Пересечение нескольких выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Доказательство. Заметим, что пустое множество или множество, состоящее из одной точки, мы считаем выпуклыми множествами. Рассмотрим два выпуклых множества M и N, пусть множество F — их пересечение (обозначается это так: $F = M \cap N$). Предположим, что множество F содержит более одной точки. Возьмём любые две точки A и B, принадлежащие множеству F. По условию точки A и B принадлежат как множеству M, так и множеству N. А так как каждое из этих множеств является выпуклым, то по определению отрезок AB целиком принадлежит как множеству M, так и N. Значит, AB принадлежит множеству F, т. е. F — выпуклое множество, поскольку A и B — любые точки этого множества. Понятно, что и пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. ▼

Из этой теоремы следует, что выпуклый многогранник (см. определение 15) является выпуклым множеством в смысле определения 16, поскольку полупространство является выпуклым множеством.

На поверхности любого многогранника имеются *грани*, *рёбра* и *вершины*. Гранью выпуклого многогранника является плоский выпуклый многоугольник. Поверхность выпуклого многогранника состоит из граней, при этом различные грани лежат в разных плоскостях. Стороны граней являются рёбрами многогранника; вершины граней — вершинами многогранника; углы многоугольников — граней выпуклого многогранника — являются плоскими углами многогранника. Двугранные углы между соседними гранями, т. е. гранями, имеющими общую сторону — ребро многогранника, являются также и *двугранными углами многогранника*.

Кроме плоских и двугранных углов у выпуклого многогранника имеются ещё и *многогранные углы*. Эти углы образуют грани, имеющие общую вершину.

Задачи, задания, вопросы

1. Какое наибольшее число сторон может иметь грань выпуклого шестигранника; стогранника?

2. Возможен ли невыпуклый многогранник с четырьмя гранями; пятью гранями?

3. Докажите, что проекцией выпуклого многогранника является выпуклый многоугольник.

4. Докажите, что любое сечение выпуклого многогранника есть выпуклый многоугольник.

5. Докажите, что плоскость, пересекающая выпуклый многогранник, делит его на два выпуклых многогранника.

6 (т). Приведите пример выпуклого стогранника, среди сечений которого найдутся многоугольники с любым числом сторон от трёх до ста.

7 (т). Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с равным числом сторон.

2.4. Многогранные углы

Как мы знаем, термин «многоугольник» конкретизируется в понятиях «треугольник», «семиугольник» и т. д. Точно так же термин «многогранный угол» является собирательным, и, заменяя «много» соответствующим числительным, получим «трёхгранный угол», «семигранный угол» и т. п. Обратим внимание на одну особенность нового термина. Ранее было введено понятие «двугранный угол», в то время как понятие «двуугольник» на плоскости (математик сказал бы: «на евклидовой плоскости», подчёркивая, что речь идёт о «евклидовой геометрии») представляется бессмысленным. И всё же «двугранный угол» — это особое понятие, обычно, говоря «многогранный угол», мы не имеем в виду двугранный угол.

Определение 17

Трёхгранный угол — это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости.

При этом выбирается та часть пространства, которая не содержит целиком никакой прямой линии.

Поясним данное определение. Рассмотрим три луча OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости. Плоские углы AOB, BOC и COA ограничивают трёхгранный угол $OABC$ (рис. 54). При этом сами углы AOB, BOC и COA называются **плоскими углами трёхгранного угла**, они образуют грани трёхгранного угла. Углы между гранями — это **двугранные углы трёхгранного угла**; лучи OA, OB и OC — **рёбра трёхгранного угла**; O — **вершина трёхгранного угла**. Грани трёхгранного угла образуют его **поверхность**.

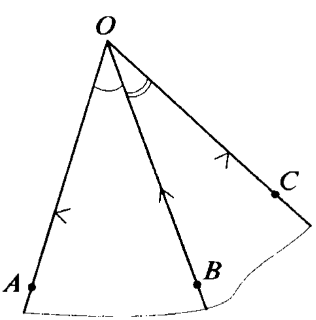


Рис. 54

Теперь нетрудно понять, что такое четырёхгранный, пятигранный и вообще n-гранный угол. Но если любой трёхгранный угол является выпуклым, то уже четырёхгранные углы могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми. Мы будем рассматривать в основном выпуклые многогранные углы. Докажем две теоремы о свойствах плоских углов трёхгранного угла.

Теорема 2.2 (*о сумме плоских углов трёхгранного угла*)

Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 2π.

Доказательство этой теоремы опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Пусть плоскость *p* проходит через основание *KL* равнобедренного треугольника *KLM*, точка *M′* — проекция *M* на плоскость *p*. (Предполагается, что точка *M* не принадлежит этой плоскости.) Тогда угол *KM′L* больше угла *KML* (рис. 55).

Доказательство вспомогательного утверждения.

Пусть KM' и LM' — проекции равных отрезков KM и KL (см. рис. 55). Значит, $KM' = LM' < KM$, т. е. треугольник KLM' равнобедренный с боковыми сторонами KM' и LM', меньшими, чем KM и LM. Поэтому внутри треугольника KLM найдётся точка M_1 такая, что $KM_1 = LM_1 = KM' = LM'$. Значит, $\angle KM'L = \angle KM_1L$, который больше, чем $\angle KML$.

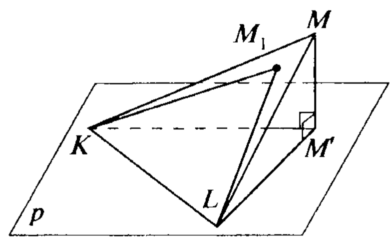


Рис. 55

Вспомогательное утверждение доказано.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим трёхгранный угол с вершиной O. Отложим на его рёбрах равные отрезки: $OA = OB = OC$ (рис. 56, *а*, *б*). Пусть $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Обозначим через O' проекцию O на плоскость ABC. Имеем $O'A = O'B = O'C$. На основании вспомогательного утверждения $\angle BO'C > \alpha$, $\angle CO'A > \beta$, $\angle AO'B > \gamma$. Если точка O' внутри треугольника ABC, то $\alpha + \beta + \gamma$ меньше, чем $\angle BO'C + \angle CO'A + \angle AO'B = 2\pi$ (см. рис. 56, *а*). Если же O' вне треугольника ABC (например, как на рис. 56, *б*), то сумма

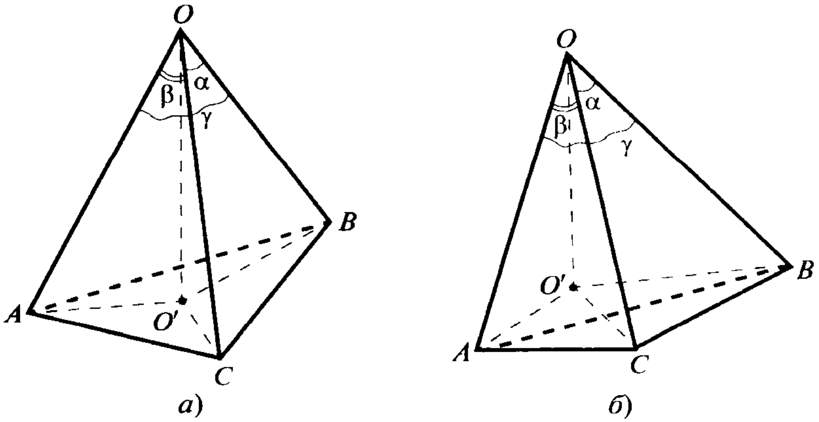


Рис. 56

$\angle BO'C + \angle CO'A + \angle AO'B$ равна удвоенному наибольшему из этих углов (на рис. 56, *б* это $\angle AO'B$), т. е. меньше 2π.

Теорема доказана полностью.▼

Теорема 2.3 *(неравенство треугольника для трёхгранного угла)*

Любой плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Доказательство. Рассмотрим трёхгранный угол $OABC$ (рис. 57). Обозначим его углы через α, β, γ. Рассмотрим луч OA', противоположный лучу OA. Плоские углы трёхгранного угла $OA'BC$ равны α, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. По теореме 20 имеем $\alpha + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$, отсюда $\alpha < \beta + \gamma$.▼

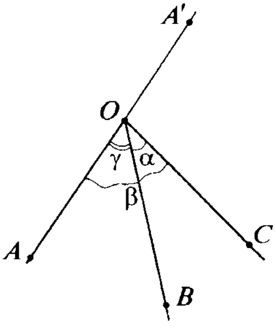


Рис. 57

Немного позже вы познакомитесь с геометрией сферы, тогда сможете придать более строгий смысл названию только что доказанной теоремы: оказывается, мы только что доказали неравенство треугольника для треугольников на сфере.

Кроме того, из доказанного свойства несложно вывести, что аналогичное утверждение справедливо для любого многогранного угла, так как любой многогранный угол можно разбить на трёхгранные, проводя «диагонали».

Задачи, задания, вопросы

1. Чему равна сумма всех плоских углов треугольной пирамиды?
2. Найдите двугранные углы трёхгранного угла, плоские углы которого равны 90°, 90° и α.
3 **(в).** Все плоские углы трёхгранного угла равны 90°. Найдите углы между биссектрисами плоских углов.
4. В каких пределах может меняться плоский угол трёхгранного угла, если два оставшихся соответственно равны: а) 70 и 100°; б) 130 и 150°?

5. На какое наименьшее число непересекающихся трёхгранных углов можно разбить пространство?

6 (в). Дан трёхгранный угол. Рассмотрим три плоскости, содержащие грани этого трёхгранного угла. Эти плоскости делят пространство на восемь трёхгранных углов. а) Найдите плоские углы всех образовавшихся трёхгранных углов, если плоские углы исходного трёхгранного угла равны A, B и C. б) Найдите двугранные углы всех образовавшихся трёхгранных углов, если двугранные углы исходного трёхгранного угла равны α, β и γ.

7. Через одну точку пространства проведены четыре плоскости, никакие три из которых не имеют общей прямой. На сколько частей делят пространство эти плоскости? Как называются образовавшиеся части пространства?

8 (в). Противоположные рёбра треугольной пирамиды попарно равны. Докажите, что все грани этой пирамиды — равные между собой остроугольные треугольники.

9 (т). A, B, C, D — четыре точки пространства. Известно, что $AD = BD = CD$, $\angle ADB = 90°$, $\angle ADC = 50°$, $\angle BDC = 140°$. Найдите углы треугольника ABC.

10. Все плоские углы трёхгранного угла равны 60°. Найдите углы, образованные рёбрами этого трёхгранного угла с плоскостями противоположных граней.

11 (т). Вершины двух трёхгранных углов совпадают, при этом рёбра первого из них целиком расположены внутри второго. Докажите, что сумма плоских углов первого трёхгранного угла меньше суммы плоских углов второго.

12 (т). Рассмотрим плоскость p, проходящую через биссектрисы плоских углов AOB и BOC трёхгранного угла $OABC$. Докажите, что плоскость p пересекает плоскость COA по прямой, перпендикулярной биссектрисе угла COA.

13 (в). Верно ли, что в результате проекции плоского угла на плоскость всегда получается угол, величина которого не меньше величины исходного угла?

14 (пт). Обозначим двугранные и плоские углы трёхгранного угла $OABC$ соответственно через A, B, C и α, β, γ (α — двугранный угол при ребре OA, $\angle A = \angle BOC$ и т. д.). Возьмём точку O' внутри этого угла и проведём лучи $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$, соответственно перпендикулярные граням трёхгранного угла $OABC$ и пересекающие их (или их продолжения). Найдите плоские и двугранные углы трёхгранного угла $O'A'B'C'$.

15 (т). Пусть x, y и z — двугранные углы трёхгранного угла. Используя результат предыдущей задачи и теоремы 2.1 и 2.2, докажите неравенства: а) $x + y + z > \pi$; б) $x + y - z < \pi$.

16 (п). Все плоские углы трёхгранного угла прямые. Докажите, что любое его сечение есть остроугольный треугольник.

17 (т). У любого ли трёхгранного угла можно провести сечение, являющееся правильным треугольником?

18 (т). Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 2π.

19 (т). Докажите, что в любой треугольной пирамиде найдётся вершина, у которой все плоские углы острые.

20 (т). Сумма плоских углов выпуклого многогранника за исключением углов, прилежащих к одной вершине, равна 3300°. Найдите сумму всех плоских углов этого многогранника.

* Решение многих стереометрических задач сводится к планиметрическим задачам. Но бывает и наоборот: при решении планиметрической задачи могут помочь свойства пространства. Примером может служить задача 11 из § 2.2. Применяемый при её решении метод можно назвать «выход в пространство». Рассмотрим ещё один пример.

21 (п). На плоскости проведены три прямые, пересекающиеся в одной точке. Пусть A и A_1 — точки на одной прямой, B и B_1 — на другой, C и C_1 — на третьей. Пусть прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке K, прямые CA и C_1A_1 — в точке L, а прямые AB и A_1B_1 — в точке M. Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой. (Это утверждение является частью теоремы Дезарга.)

22 (т). Используя утверждение предыдущей задачи, решите следующую задачу: на плоскости отмечены две точки A и B; проведите с помощью одной линейки прямую, проходящую через A и B, если длина линейки меньше расстояния между точками A и B.

2.5. Правильная пирамида

Одним из важнейших видов многогранников являются пирамиды, с которыми вы уже неоднократно встречались. Любой школьник наверняка сможет отличить пирамиду от многогранника иного вида. Но лишь в этом параграфе даётся формальное определение понятия «пирамида».

Определение 18

n-Угольной пирамидой называется многогранник, имеющий $n + 1$ грань (т. е. $n + 1$-гранник), причём одна грань у него — n-угольник, а n оставшихся граней — треугольники с общей вершиной.

n-Угольная грань n-угольной пирамиды называется **основанием**, а все прочие треугольные грани называются **боковыми гранями.** Общую для боковых граней вершину называют **вершиной пирамиды**. Рёбра пирамиды, выходящие из вершины, называют **боковыми рёбрами пирамиды.**

Простейший многогранник — четырёхгранник или **тетраэдр** — это также и простейшая пирамида — треугольная. Особенность треугольной пирамиды состоит в том, что любую грань можно рассматривать как основание. (Три другие грани являются соответственно боковыми гранями.) Именно разумный выбор основания может быть залогом успеха решения некоторых задач.

Приведём две полезные теоремы.

Теорема 2.4 *(свойство пирамиды с равными боковыми рёбрами)*

Если боковые рёбра пирамиды равны между собой, то в основании этой пирамиды лежит многоугольник, около которого можно описать окружность. При этом вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности.

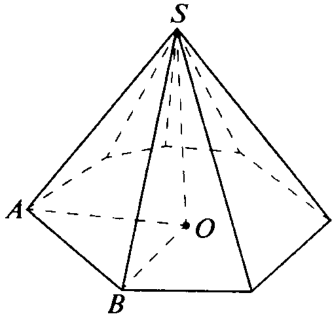


Рис. 58

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что равные наклонные имеют равные проекции. Пусть S — вершина пирамиды, A и B — две какие-то вершины основания, O — проекция S на плоскость основания (рис. 58). Треугольники SAO и SBO — прямоугольные ($\angle SOA = \angle SBO = 90°$) с общим катетом SO и равными по условию гипотенузами: $SA = SB$. Значит, $OA = OB$. Таким образом, точка O равноудалена от всех вершин основания.

Теорема доказана.▼

Теорема 2.5 *(свойство пирамиды с равными углами между основанием и боковыми гранями)*

Если все углы между плоскостями боковых граней и плоскостью основания равны между собой (иными словами, боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами), то все прямые, на которых лежат стороны основания, касаются одной окружности, а вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

Доказательство. Пусть S — вершина пирамиды, O — проекция S на плоскость основания, AB — какая-то сторона основания, K — проекция S на прямую AB, α — угол между плоскостью основания и плоскостями боковых граней. По определению $\alpha \leqslant 90°$ (в данном случае $\alpha \neq 90°$, рис. 59, *а*); $\angle SKO = \alpha$ — линейный угол соответствующего двугранного угла. Если $SO = h$, то

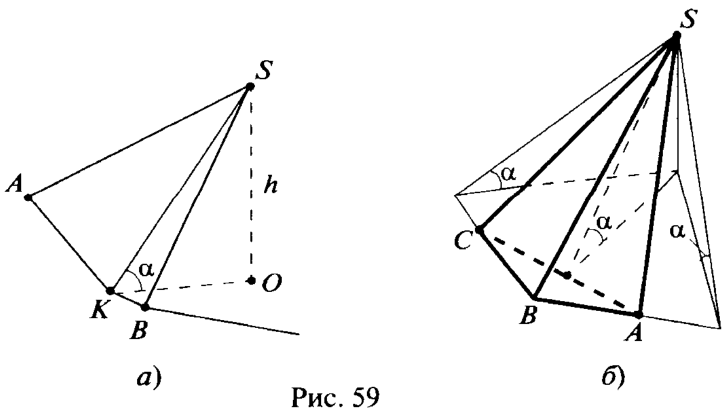


Рис. 59

$OK = SO \operatorname{ctg} \angle SKO = h \operatorname{ctg} \alpha$. Таким же будет расстояние от O до всех сторон основания.▼

Замечание. Обратите внимание на то, что в условии теоремы говорится об углах между парами плоскостей — плоскостью основания и плоскостями боковых граней. Утверждение теоремы будет тем более верным, если равны двугранные углы при основании, т. е. двугранные углы, рёбрами которых служат стороны основания и одна из граней которых — полуплоскость, содержащая боковую грань, а другая — полуплоскость, содержащая основание пирамиды. В этом случае вершина проектируется непременно внутрь основания (в случае равенства двугранных углов при основании все эти углы непременно острые), в то время как при условиях, сформулированных в теореме, проекция вершины может оказаться и вне основания (рис. 59, *б*). Итак, мы можем уточнить утверждение теоремы 2.5.

Если в основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник и все двугранные углы при основании равны, то основанием является описанный многоугольник, а вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности.

Отрезок SO (S — вершина, O — проекция S на плоскость основания) называется **высотой пирамиды**, O — **основание высоты**. Нетрудно теперь переформулировать теоремы 2.3 и 2.4 с использованием терминов «высота пирамиды» и «основание высоты».

В следующей теореме формулируется общее свойство произвольных пирамид.

Теорема 2.6 (*свойство параллельных сечений пирамиды*)

Сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию, является многоугольник, подобный основанию.

Доказательство. Докажем, что все углы в сечении равны соответствующим углам основания, а стороны сечения пропорциональны соответствующим сторонам основания. Заметим, что достаточно это сделать для двух соседних сторон основания и соответствующих им сторон сечения.

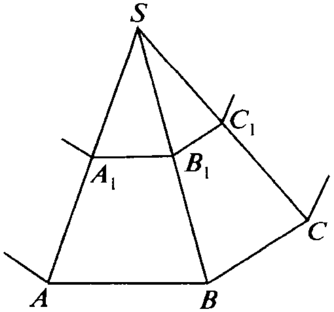
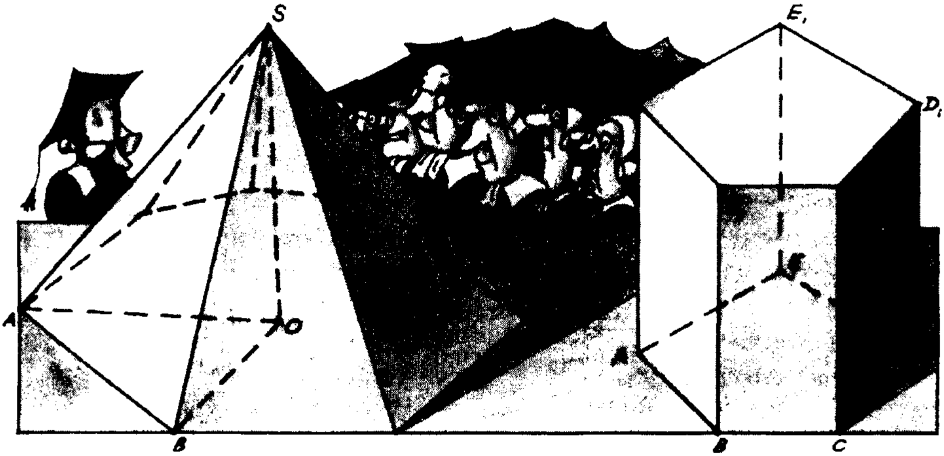


Рис. 60

Пусть A, B, C — три последовательные вершины основания, S — вершина пирамиды, A_1, B_1, C_1 — точки, в ко-



торых плоскость, параллельная основанию, пересекает рёбра SA, SB и SC соответственно (рис. 60). Так как $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$, то $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ (см. теорему 1.8). Кроме того, из подобия пар треугольников SA_1B_1 и SAB, SB_1C_1 и SBC получаем: $A_1B_1 : AB = SB_1 : SB = B_1C_1 : BC$.▼

Среди множества пирамид выделяется один важный тип пирамид: правильные пирамиды.

Определение 19

Пирамида называется правильной, если в основании её лежит правильный многоугольник, а все боковые рёбра равны между собой.

Приведём определение правильного тетраэдра.

Правильным называется тетраэдр (т. е. треугольная пирамида), у которого все рёбра равны между собой.

Понятно, что правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр — это не одно и то же.

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Все боковые рёбра пирамиды равны b, а высота равна h. Чему равен радиус описанной около основания окружности?

2 (в). Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

3 (в). Найдите высоту правильного тетраэдра с ребром a.

4. Сколько существует различных пирамид, все рёбра которых равны l?

5 (в). Докажите, что если боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы, то в основании лежит вписанный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центр описанной около него окружности.

6. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Боковые рёбра пирамиды равны l. Найдите высоту пирамиды.

7 (в). Докажите, что если у пирамиды равны боковые рёбра и двугранные углы при основании, то эта пирамида является правильной.

8. Три стороны основания четырёхугольной пирамиды равны 5, 7 и 8 (стороны следуют в указанном порядке). Найдите четвёртую сторону основания, если известно, что двугранные углы при основании равны.

9. В пирамиде $ABCD$ площадь грани ABC в четыре раза больше площади грани ABD. Возьмём на ребре CD точку M такую, что $CM : MD = 2$. Через M проведены плоскости, параллельные граням ABC и ABD. Найдите отношение площадей получившихся при этом сечений.

10. Боковое ребро пирамиды разделено на 100 равных частей, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение площадей наибольшего и наименьшего из получившихся сечений.

11. На боковом ребре AB пирамиды взяты точки K и M так, что $AK = BM$. Через эти точки проведены сечения, параллельные основанию пирамиды. Известно, что сумма площадей этих сечений составляет $\frac{2}{3}$ площади основания пирамиды. Найдите $KM : AB$.

12 (т). Все двугранные углы при основании пирамиды равны α, а углы, образуемые боковыми рёбрами с основанием, равны β. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = k \operatorname{tg} \beta$. Сколько сторон имеет основание пирамиды, если $k = 2$? Чему может быть равно k?

13. Двугранные углы при основании пирамиды равны α, площадь боковой поверхности S. Найдите площадь основания.

14. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник. Высота пирамиды равна h. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания. (Рассмотрите все возможности.)

15 (в). В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Боковые грани наклонены к плоскости основания пирамиды под углом 45°. Чему может быть равна высота пирамиды?

16 (в). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро b. Найдите высоту пирамиды и двугранный угол между боковыми гранями.

17. На гранях правильного тетраэдра с ребром a во внешнюю сторону построены правильные тетраэдры. Докажите, что новые вершины построенных тетраэдров являются вершинами правильного тетраэдра. Найдите его ребро.

18 (т). На гранях правильного тетраэдра, как на основаниях, построены равные правильные пирамиды, расположенные вне тетраэдра. Плоские углы в этих пирамидах при вершинах, противолежащих граням тетраэдра, прямые. Рассмотрим многогранник, образованный тетраэдром и указанными пирамидами. Сколько граней у этого многогранника? Как он называется?

19 (п). Плоские углы при вершине правильной n-угольной пирамиды равны α. Найдите двугранные углы при основании этой пирамиды. Решите задачу при $n = 3$; 4. Приведите ответ для произвольного n.

20 (в). В основании пирамиды лежит многоугольник, площадь которого равна 6. Плоскость, параллельная основанию, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2 (считая от вершины). Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

21. В основании правильной треугольной пирамиды лежит треугольник площади S, площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного рёбра.

22 (в). Площадь основания правильной n-угольной пирамиды равна S, а площадь боковой грани равна Q. Найдите двугранные углы при основании этой пирамиды.

23. Имеются две правильные треугольные пирамиды с общим основанием. Все плоские углы при противолежащей вершине одной из пирамид равны 60°, а у другой пирамиды они равны 90°. Найдите отношение высот этих пирамид.

24. В треугольной пирамиде $ABCD$ площади граней ABC и ABD равны 3 и 4. Через точку на ребре CD проведены плоскости, параллельные ABC и ABD и пересекающие пирамиду по равновеликим треугольникам. В каком отношении эта плоскость делит ребро CD?

25 (т). Сколько различных пирамид можно составить из шести отрезков длиной 1, 2, 2, 3, 3, 3 (эти отрезки равны рёбрам пирамиды)?

26 (п). Существует ли четырёхугольная пирамида, две противоположные грани которой перпендикулярны плоскости основания?

27 (в). Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные рёбра попарно перпендикулярны.

28. В пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ известны плоские углы при вершине S: $\angle ASB = 30°$, $\angle BSC = 40°$, $\angle CSD = 50°$, $\angle DSA = 80°$. В каких пределах могут меняться $\angle ASC$ и $\angle BSD$?

29 (п). Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды — прямые. Докажите, что эта вершина проектируется в точку пересечения высот противоположной грани.

30. Через середину какого-то ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум её скрещивающимся рёбрам. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а её боковое ребро равно b.

31 (т). Ребро правильного тетраэдра равно a. Чему равно наибольшее значение площади проекции этого тетраэдра на плоскость?

32 (т). В пирамиде $ABCD$ грань ABC представляет собой правильный треугольник, ребро DA равно стороне этого треугольника. Все плоские углы при вершине D равны между собой. Чему могут быть равны эти углы?

33 (т). В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = AC = 2$. Известно также, что $SB = 6$, а ребро SD является высотой этой пирамиды. Найдите SD.

34 (т). Разрежьте пирамиду $ABCD$ на восемь подобных ей и равных между собой пирамид, если:

а) $AB = CD$, ребро AB перпендикулярно CD, а общий перпендикуляр к AB и CD равен половине каждого из них и проходит через середины этих рёбер;

б) все плоские углы при вершине D — прямые и $DA = DB = DC\sqrt{2}$;

в) двугранный угол при ребре BC — прямой, $\angle ABC = \angle BCD = 90°$ и $AB = BC = CD$;

г) $AC = CB$, $\angle ACB = 90°$, высота, опущенная из вершины D, проходит через середину AB и равна $\frac{1}{2}AC$.

Существуют ли треугольные пирамиды другого вида, которые можно разрезать на подобные между собой и исходной пирамиде пирамиды (не обязательно на восемь), неизвестно. Эта задача до настоящего момента (времени создания учебника) относится к нерешённым.

2.6. Призма, параллелепипед

Определение 20

Призмой называется многогранник, все вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях, причём в этих же двух плоскостях лежат две грани призмы, представляющие собой равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все рёбра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны.

Эти две равные грани называются **основаниями** призмы. Все остальные грани призмы называются **боковыми**, они образуют **боковую поверхность** призмы. Все боковые грани призмы являются параллелограммами.

Рёбра, не лежащие в основаниях, называются **боковыми рёбрами** призмы. Призму называют **n-угольной**, если её основаниями являются n-угольники.

На рисунке 61 изображена пятиугольная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Здесь использован наиболее распространённый (стандартный) способ обозначения вершин призмы и стандартная запись: сначала в порядке обхода указывают вершины одного основания, а затем в том же порядке — вершины другого; концы каждого бокового ребра обозначают одинаковыми буквами, только вершины, лежащие в одном основании, обозначают буквами без индекса, а в другом — с индексом.

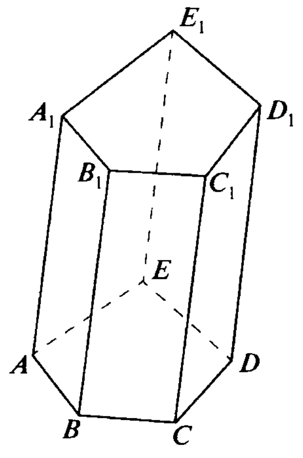


Рис. 61

Хорошо известный параллелепипед (рис. 62) является частным случаем призмы: **параллелепипед** — это четырёхугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы. Причём за основание можно взять любую грань параллелепипеда.

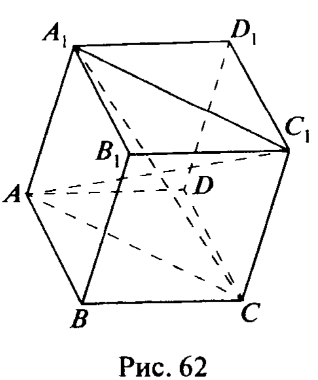


Рис. 62

Призма называется **прямой**, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

2.6

Призма называется **правильной**, если она прямая, а её основания — правильные многоугольники.

Как было отмечено, параллелепипед является частным случаем призмы. Особо выделим **прямоугольный параллелепипед** — параллелепипед, все грани которого прямоугольники (рис. 63).

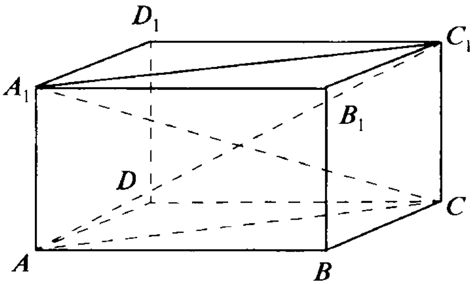


Рис. 63

Диагональ параллелепипеда — это отрезок, соединяющий его противоположные вершины. У параллелепипеда четыре диагонали.

Теорема 2.7 (свойство диагоналей параллелепипеда)

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является **центром симметрии** параллелепипеда, или просто **центром** параллелепипеда.

Уточним, что мы называем центром симметрии фигуры или тела точку, при симметрии относительно которой тело переходит само в себя. Заметим также, что образ параллелепипеда при симметрии однозначно задаётся образами его вершин. Поэтому точка пересечения диагоналей будет центром симметрии параллелепипеда (если мы докажем теорему 2.7).

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 62). Докажем, что любые две его диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Возьмём, например, диагонали AC_1 и CA_1. Рёбра AA_1 и CC_1 равны и параллельны, поскольку каждое из них равно и параллельно ребру BB_1. Значит, AA_1C_1C — параллелограмм, диагонали AC_1 и CA_1 которого пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.▼

Следствие

Параллелепипед имеет центр симметрии. Это — точка пересечения его диагоналей. Двенадцать рёбер параллелепипеда образуют три четвёрки соответственно равных между собой и параллельных отрезков.

Теорема 2.8

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 63). Рёбра AA_1 и CC_1 равны и перпендикулярны граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, в которых лежат отрезки AC и A_1C_1. Следовательно, AA_1C_1C — прямоугольник и $AC_1 = CA_1$. То же верно для любой пары диагоналей.▼

Теорема 2.9 (*теорема Пифагора для прямоугольного параллелепипеда*)

Пусть *a*, *b* и *c* — длины трёх непараллельных рёбер прямоугольного параллелепипеда, *d* — его диагональ. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. (Эта теорема представляет собой один из многих пространственных аналогов теоремы Пифагора.)

Доказательство. Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 63) $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. (Такими же соответственно будут и длины параллельных им рёбер.) Так как AA_1C_1C — прямоугольник, то

$$d^2 = AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2.▼$$

Задачи, задания, вопросы

1. Разрежьте треугольную призму на три треугольные пирамиды.
2. Разрежьте куб на три равные четырёхугольные пирамиды.
3. Сумма трёх чисел, равных количеству вершин, рёбер и граней некоторого многогранника, равна: а) 102; б) 104. Определите вид многогранника, если известно, что это либо пирамида, либо призма.

4 (в). Найдите диагональ единичного куба.

5. Три отрезка, не лежащие в одной плоскости, имеют общую точку и делятся этой точкой пополам. Докажите, что концы этих отрезков служат вершинами параллелепипеда.

6. Найдите расстояние от центра грани единичного куба до вершин противоположной грани.

7. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 4. Найдите угол между его диагоналями.

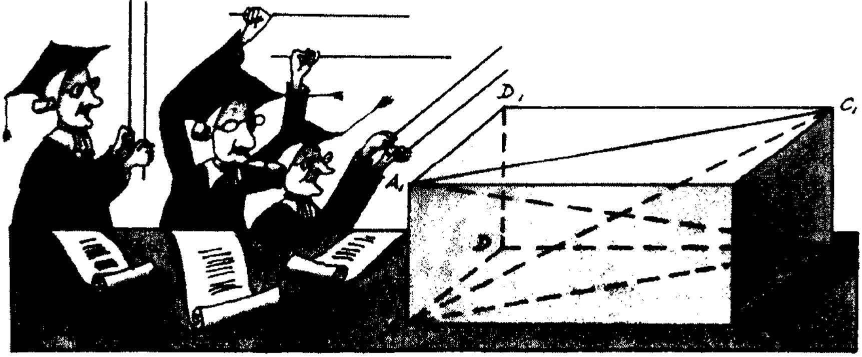
8. Проекции отрезка на три попарно перпендикулярные прямые равны 1, 2 и 3. Найдите длину этого отрезка.

9. Найдите расстояние между серединами непараллельных сторон разных оснований правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 2.

10. Покажите, что в кубе можно выбрать четыре вершины, являющиеся вершинами правильного тетраэдра, причём сделать это можно двумя способами.

11. Рассмотрим две треугольные пирамиды, вершинами которых служат вершины данного параллелепипеда. (Каждая вершина параллелепипеда является вершиной одной пирамиды.) Возможно ли, чтобы каждая вершина одной из пирамид принадлежала плоскости грани другой пирамиды, и наоборот?

12. Через точку на ребре треугольной пирамиды проведены две плоскости, параллельные двум граням этой пирамиды. Эти плоскости отсекают две треугольные пирамиды. Разрежьте оставшийся многогранник на две треугольные призмы.



13 (в). Диагонали трёх различных граней прямоугольного параллелепипеда равны m, n и p. Найдите диагональ этого параллелепипеда.

14 (в). Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его рёбрами углы α, β и γ. Докажите, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

15 (в). В каком отношении диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ делится плоскостью A_1BD?

16 (т). В одном старом учебнике дано такое определение призмы: «Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Приведите пример многогранника, удовлетворяющего этому определению, но не являющегося призмой.

17 (т). Станет ли верным определение, приведённое в предыдущей задаче, если перед словом «многогранник» поставить слово «выпуклый»?

Указание. Возьмём куб и на каждой его грани, как на основании, во внешнюю сторону построим правильную четырёхугольную пирамиду с двугранными углами при основании 45°.

18 (т). Найдите ребро куба, одна грань которого лежит в плоскости основания правильной пирамиды, а четыре оставшиеся вершины — на её боковой поверхности, если сторона основания пирамиды равна a, а высота h. Решите эту задачу: а) для правильной четырёхугольной пирамиды; б) для правильной треугольной пирамиды.

19 (п). Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c ($a \leqslant b \leqslant c$). Найдите: а) углы между его диагоналями; б) угол между диагональю параллелепипеда и скрещивающейся с ней диагональю грани со сторонами a и b; в) угол между скрещивающимися диагоналями двух граней с общим ребром a.

20. Пусть K, L и M — середины рёбер AD, A_1B_1 и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = a$, $AA_1 = b$, $AD = c$. Найдите периметр треугольника KLM.

21 (т). Укажите все точки на диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, через которые нельзя провести прямую, пересекающую прямые: а) BC и DD_1; б) A_1B и B_1C.

22 (т). Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 1 и 2. Плоскость, параллельная этим рёбрам, делит параллелепипед на два неравных, но подобных между собой параллелепипеда. Найдите длину ребра, отличного от данных.

23 (т). На рёбрах A_1B_1 и A_1D_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки K и M так, что $A_1K = A_1M = x$. Найдите x, если известно, что при повороте куба вокруг диагонали AC_1 на угол α точка K переходит в M.

24 (п). Постройте изображение призмы $ABCA_1B_1C_1$, если на плоскости даны изображения следующих точек: а) A, B, B_1 и C_1; б) середин AA_1, BC, CC_1 и A_1C_1.

25. Постройте изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если даны изображения следующих точек: а) A, B, D, A_1; б) A, B, C, D_1; в) A, C, B_1, D_1; г) середин AB_1, BC_1, CD, A_1D_1; д) A, B и центров граней $A_1B_1C_1D_1$ и CDD_1C_1.

26. Дано изображение призмы $ABCA_1B_1C_1$. Постройте изображение точки M пересечения плоскостей A_1BC, AB_1C и ABC_1. Пусть высота призмы равна h. Чему равно расстояние от точки M до оснований призмы?

27 (пт). Пусть O — середина высоты правильной треугольной пирамиды. Вторая пирамида симметрична данной относительно точки O. Как называется многогранник, являющийся общей частью двух указанных пирамид? (Если вы не знаете его названия, опишите, как он устроен.) Чему равна площадь поверхности этого многогранника, если площадь боковой грани равна S?

28 (т). Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c ($a < b < c$). Некоторое сечение этого параллелепипеда является квадратом. Найдите сторону этого квадрата.

29. Проекция вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на некоторую плоскость лежит внутри проекции треугольника A_1BD на эту плоскость. Докажите, что площадь проекции параллелепипеда в два раза больше площади проекции треугольника A_1BD.

30 (т). Используя результат предыдущей задачи, найдите, чему равно наибольшее значение площади проекции прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b и c на некоторую плоскость.

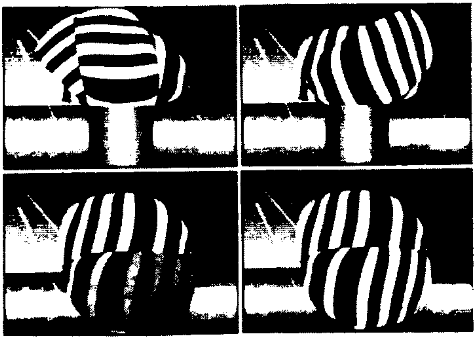
31 (т). Через центр единичного куба проведена плоскость, делящая его на два многогранника. Докажите, что в каждом из получившихся многогранников найдётся диагональ, длина которой не меньше $\frac{3}{2}$.

32. Многогранники изучают, их свойства используют представители самых различных профессий. Например, свойствам многогранников посвящены разделы таких наук, как минералогия и кристаллография. Известный русский минералог и кристаллограф Е. С. Фёдоров (1853—1919) сделал немало замечательных открытий, связанных со свойствами многогранников. Некоторые из открытых им многогранников называют «фёдоровскими». Вот один из них.

Возьмём куб и соединим его центр со всеми вершинами. Для каждого из восьми полученных таким образом отрезков построим плоскость, перпендикулярную ему и проходящую через середину. Рассмотрим многогранник, ограниченный этими плоскостями и поверхностью куба (в него входит центр куба). Сколько граней имеет получившийся многогранник? Какими многоугольниками являются его грани? Докажите, что такими многогранниками можно заполнить всё пространство без пропусков и пересечений.

3

Круглые тела



3.1. Основные понятия

Конус, **цилиндр** и **шар** — важнейшие виды круглых тел. Любой школьник имеет о них представление, поскольку с раннего детства регулярно встречается с предметами, имеющими коническую, цилиндрическую или же шарообразную форму.

Мы будем рассматривать один специальный вид конусов и цилиндров — прямые круговые конусы и цилиндры.

Поверхность, ограничивающая **прямой круговой конус**, состоит из двух частей — основания и боковой поверхности. Основанием такого конуса является круг. Боковая поверхность состоит из всевозможных отрезков, соединяющих точку S — вершину конуса — с точками окружности, ограничивающей основание конуса. При этом точка S расположена вне основания и проектируется в его центр (рис. 64). Слова «прямой круговой» означают как раз, что основанием конуса является круг («круговой»), а вершина проектируется в центр этого круга («прямой»).

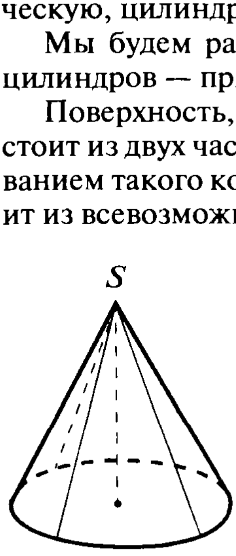


Рис. 64

В широком смысле под **конусом** понимают тело, поверхность которого получается следующим образом. Берётся произвольная замкнутая несамопересекающаяся плоская кривая L и произвольная точка S, не лежащая в одной плоскости с этой кривой. Кривую L называют **направляющей** конуса, фигуру, ограниченную этой кривой, — **основанием**, а точку S — **вершиной** конуса. Всевозможные отрезки, соединяющие вершину S с точками на направляющей, будем называть **образующими** конуса. Они заполняют **боковую поверхность** конуса. Заметим, что из данных определений следует, что любую пирамиду можно считать разновидностью конуса.

Если боковую поверхность конуса разрезать по образующей, то её можно будет «развернуть» на плоскость. **Развёрткой** прямого кругового конуса является круговой сектор с радиусом, равным длине образующей.

Мы будем изучать свойства только прямого кругового конуса, а слова «прямой круговой» будем для краткости опускать. Таким образом, если говорится «рассмотрим конус», то это означает «рассмотрим прямой круговой конус». Если потребуется другой конус, мы об этом сообщим.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае, когда рассматривается цилиндр. Мы будем изучать **прямой круговой цилиндр**. Его поверхность состоит из двух оснований и боковой поверхности. Основаниями прямого кругового цилиндра являются два равных круга, расположенных в параллельных плоскостях так, что прямая, соединяющая центры кругов, перпендикулярна этим плоскостям. Боковую поверхность цилиндра образуют всевозможные отрезки, перпендикулярные основаниям с концами на окружностях основания, — **образующие** цилиндра (рис. 65).

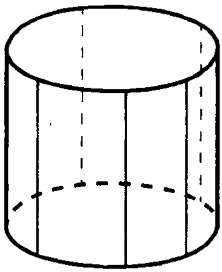


Рис. 65

Как и в случае конуса, можно говорить о произвольных цилиндрах. Говоря о цилиндре, слова «прямой круговой» мы также будем опускать. Развёрткой боковой поверхности цилиндра, если её разрезать по образующей, является прямоугольник.

«Самым круглым» из всех тел, безусловно, является шар. Поверхность шара — **сфера** — есть геометрическое место точек пространства, удалённых на заданное расстояние, называемое **радиусом**, от одной точки — **центра** сферы (рис. 66). Со сферой, шаром (как и с окружностью, и с кругом) связаны понятия **«диаметр»** и **«хорда»**.

Рис. 66

3.2. Тела вращения

Прямые круговые конус и цилиндр, а также шар являются представителями класса тел вращения.

Телом вращения называется тело, полученное в результате вращения некоторой фигуры (обычно плоской) вокруг прямой. Эта прямая называется **осью вращения**.

Конус (прямой круговой) представляет собой тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (точнее вокруг прямой, содержащей катет). При этом указанный катет неподвижен и называется **осью конуса**. Так, при вращении прямоугольного треугольника SOA с прямым углом при вершине O вокруг катета SO получается конус с осью SO, где S — вершина конуса, O — центр основания, OA — радиус основания (рис. 67).

Цилиндр (прямой круговой) — это тело вращения, получающееся в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон (точнее говоря, вокруг прямой, содержащей сторону). При этом указанная сторона образует ось цилиндра. На рисунке 68 изображён цилиндр с осью O_1O_2, полученный в результате вращения прямоугольника ABO_1O_2 вокруг прямой O_1O_2; O_1 и O_2 — центры оснований цилиндра.

При пересечении конуса, цилиндра или любого тела вращения плоскостью, содержащей ось вращения, получается **осевое сечение**. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, осевое сечение цилиндра — прямоугольник. Все осевые сечения одного тела вращения равны между собой.

Шар как тело вращения может быть получен при вращении круга (или полукруга) вокруг диаметра. Очень важное характеристическое свойство шара даёт следующая теорема.

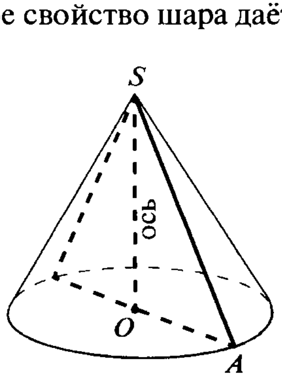


Рис. 67

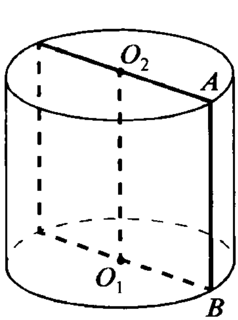


Рис. 68

Теорема 3.1 (*о сечениях шара*)

Любое сечение шара плоскостью есть круг. (Сечением сферы соответственно является окружность.) При этом если R — радиус шара, d — расстояние от центра шара до плоскости сечения, то радиус сечения равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Доказательство. Пусть O — центр шара, O' — проекция центра шара на плоскость сечения, $OO' = d$, A — некоторая точка, принадлежащая сфере и плоскости сечения (рис. 69). Треугольник $OO'A$ прямоугольный, $\angle OO'A = 90°$. Следовательно,

$$O'A = \sqrt{OA^2 - O'O^2} = \sqrt{R^2 - d^2} = r.$$

Отсюда следует, что точка A принадлежит окружности с центром в O' и радиусом r, лежащей в плоскости сечения, ведь такая окружность есть множество точек плоскости, удалённых от O' на расстояние r. Нетрудно проверить, что любая точка этой окружности лежит на данной сфере. ▼

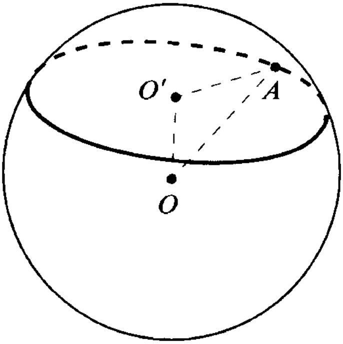
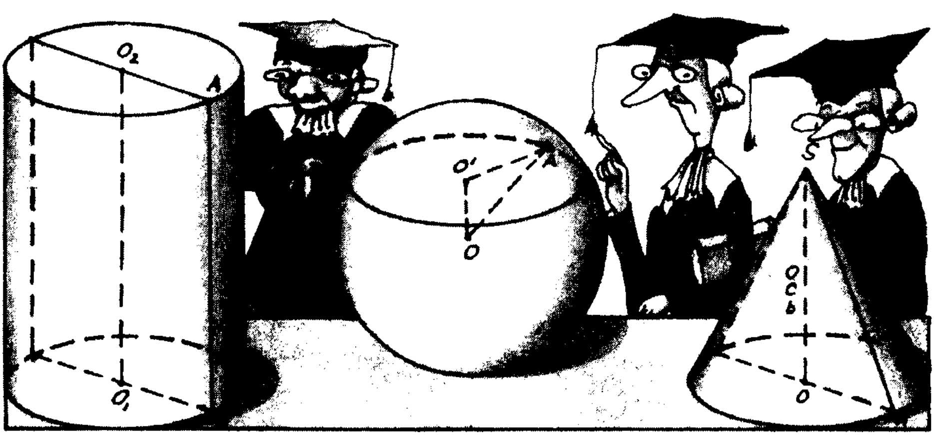


Рис. 69

Радиус сечения шара будет наибольшим, когда плоскость проходит через центр шара. Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, так и называется **большим кругом** шара, а окружность, его ограничивающая, **большой окружностью**.



Теорема 3.2* (*кратчайший путь по сфере*)

Кратчайшим путём по сфере, соединяющим две её точки *A* и *B*, является меньшая из двух дуг *AB* большой окружности, проходящей через *A* и *B*.

Доказательство. Возьмём на меньшей дуге AB произвольную точку M и докажем, что кратчайший путь, соединяющий точки A и B, должен пройти через M (рис. 70). Пусть O — центр сферы. Проведём через M две плоскости, перпендикулярные соответственно OA и OB. Эти плоскости пересекают сферу по двум окружностям ω и υ, которые имеют единственную общую точку M (это точка касания сферы с прямой, по которой пересекаются плоскости, содержащие ω и υ). Рассмотрим любой путь из A в B, не проходящий через M. Пусть этот путь пересекает окружность ω в точке K, а окружность υ — в точке P. Легко видеть, что существует путь, соединяющий точки A и M, такой же длины, что и путь, соединяющий точки A и K. В этом можно убедиться, повернув окружность ω вокруг OA так, чтобы точка K перешла в точку M. Аналогично, существует путь, соединяющий точки B и M, такой же длины, что и путь, соединяющий точки B и P. Отсюда следует, что кратчайший путь, соединяющий A и B, на самом деле должен проходить через M. Теорема доказана, поскольку M — произвольная точка меньшей дуги AB.▼

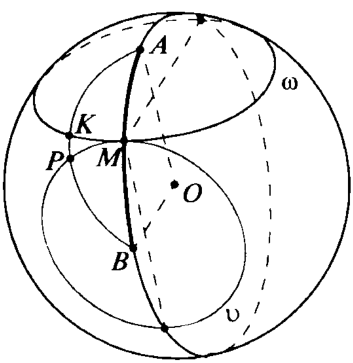


Рис. 70

Это свойство окружностей позволяет называть их прямыми на сфере. По аналогии с плоскостью можно говорить о треугольниках, многоугольниках, окружностях и т. п. на сфере. Их изучением занимается *сферическая геометрия*.

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Высота конуса равна h, а длина образующей l. Найдите радиус основания и площадь осевого сечения конуса.

2. Определите вид тела, получающегося в результате вращения квадрата вокруг его диагонали.

3 (в). Найдите угол в осевом сечении конуса (вершина угла совпадает с вершиной конуса), если образующая конуса в два раза больше его высоты.

4 (в). Найдите площадь сечения шара радиусом 3 плоскостью, удалённой от его центра на расстояние 2.

5. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 2. Через вершину конуса проведено сечение, образующее угол α с плоскостью основания. Найдите площадь этого сечения.

6. Из круга вырезан сектор, равный четверти круга. Из этого сектора и из оставшейся части круга изготовлены боковые поверхности двух конусов. Найдите отношение высот этих конусов.

7. Сфера радиусом 2 пересечена плоскостью, удалённой от центра на расстояние 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя наиболее удалёнными точками сечения.

8. Найдите площадь осевого сечения тела, получающегося при вращении правильного треугольника со стороной a вокруг прямой, проходящей через его центр параллельно одной из сторон.

9 (п). Радиус основания цилиндра равен r. Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра, не пересекает его оснований и образует угол α с плоскостью основания. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью.

10 (п). Квадрат со стороной a вращается вокруг прямой l, параллельной его плоскости. Расстояние от l до плоскости квадрата равно h, причём проекция l на плоскость квадрата проходит через середины его противоположных сторон. Опишите тело вращения. Найдите площадь осевого сечения.

11 (т). Правильная четырёхугольная пирамида вращается вокруг прямой, проходящей через её вершину параллельно одной из сторон основания. Найдите площадь осевого сечения получившегося тела, если сторона основания пирамиды равна a, а высота h.

12 (т). На плоскости изображена окружность и две точки A и B_1, причём точка A лежит внутри окружности. Известно, что окружность является окружностью основания некоторого конуса, точка A лежит на основании этого конуса, а точка B_1 есть проекция точки B, лежащей в плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно его основанию. Постройте проекцию (изображение) точки, в которой отрезок AB пересекает боковую поверхность конуса.

13 (т). Через вершину конуса (прямого кругового) проведено сечение наибольшей площади. Оказалось, что площадь этого сечения в два раза больше площади осевого сечения конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса (угол между образующими).

14 (т). Высота цилиндра равна h, радиус основания r. Найдите наибольшее значение площади проекции этого цилиндра на плоскость.

3.3. Касание круглых тел с плоскостью, с прямой и между собой

Определение 21

Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется касательной плоскостью к этой сфере.

Теорема 3.3 (*о плоскости, касательной к сфере*)

Через каждую точку A сферы проходит единственная плоскость, касающаяся сферы. Это плоскость, перпендикулярная радиусу OA, где O — центр сферы.

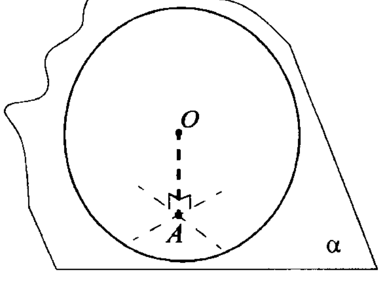


Рис. 71

Доказательство. Пусть α — плоскость, проходящая через A и перпендикулярная OA (рис. 71). Все точки плоскости α, кроме A, лежат вне сферы, поскольку удалены от O на расстояние, превышающее радиус сферы. (Напомним: кратчайший путь от точки до плоскости — это путь по перпендикуляру к плоскости.) Значит, α — касательная плоскость.

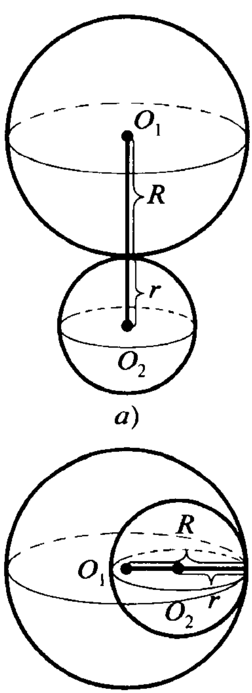
С другой стороны, если некоторая плоскость касается сферы в точке A, то A — ближайшая к O точка плоскости, иначе точек плоскости, удалённых от O на радиус сферы, было бы больше одной. Значит, эта плоскость совпадает с α.▼

В пространстве возможны различные случаи касания круглых тел с плоскостями и прямыми, а также между собой. Вот некоторые из них.

Плоскость, касающаяся боковой поверхности конуса (цилиндра), — это плоскость, которая имеет с боковой поверхностью конуса (цилиндра) единственный общий отрезок, являющийся образующей конуса (цилиндра).

Прямая, касающаяся сферы, — это прямая, которая имеет единственную общую точку с этой сферой. Аналогичный смысл имеет понятие **«прямая, касающаяся боковой поверхности конуса (цилиндра)»**. При этом рассматриваются прямые, не проходящие через точки на основании конуса (цилиндра) и через вершину конуса.

Смысл выражений: «две касающиеся сферы» и «сфера касается боковой поверхности конуса (цилиндра)» — достаточно ясен. Заметим, что здесь возможны два вида касания: *внутреннее* и *внешнее*. Об этом не следует забывать при решении задач, в условии которых не говорится о характере касания.



а)

б)

Рис. 72

Заметим, что так же, как и при касании двух окружностей на плоскости, центры касающихся сфер и точка их касания попадают на одну прямую. Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства его плоского аналога: если это не так (рис. 72), то расстояние между центрами сфер будет строго меньше суммы радиусов. Рассмотрим плоскость, проходящую через T, O_1 и O_2. Эта плоскость будет содержать больше одной точки, общей для данных сфер, следовательно, сферы не будут касающимися.

В остальных случаях касания круглых тел тоже можно описать положение разных частей конструкции — центров шаров, оси корпуса или цилиндра и т. п. относительно друг друга. Обычно ответы на этот вопрос интуитивно очевидны, хотя доказать соответствующее утверждение строго не очень просто. Мы рекомендуем вам подумать над этим самостоятельно: при решении задач часто строго обосновывать такие утверждения необходимо.

Задачи, задания, вопросы

1. Два шара с радиусами 2 и 3 имеют центры в точках A и B соответственно, $AB = 7$. Плоскость, касающаяся этих шаров, пересекает прямую AB в точке M. Найдите AM.

2. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной 4. Шар касается плоскости основания конуса в точке M и боковой поверхности конуса. Найдите радиус шара, если расстояние от точки M до оси конуса равно: а) 1; б) 3.

3. Осевым сечением цилиндра является единичный квадрат. Найдите радиус наименьшей сферы, проходящей через его центр и касающейся боковой поверхности.

4. Имеется плоскость α и прямая l, перпендикулярная ей. Найдите геометрическое место центров шаров радиусом r, касающихся одновременно плоскости α и прямой l.

5 (в). Рассмотрим всевозможные шары заданного радиуса, касающиеся граней данного двугранного угла. Найдите геометрическое место центров этих шаров.

6. Шар радиусом R касается плоскости α. Рассмотрим всевозможные шары радиусом r, касающиеся данного шара и плоскости α. Найдите геометрические места центров этих шаров и точек касания с плоскостью и данным шаром.

7. Точка A расположена вне сферы, AB — отрезок касательной к этой сфере (B — точка касания). Прямая, проходящая через A, пересекает сферу в двух точках C и D. Докажите, что имеет место равенство $AB^2 = AC \cdot AD$.

8 (т). В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 3$, $AC = 4$. Два шара с радиусами 2 и 3 имеют центры в точках B и C. Через точку A проходит прямая, касающаяся одного шара в точке M, а другого — в точке K. Найдите MK, если: а) $BC = 2$; б) $BC = 5$; в) $BC = 6$.

9. Сторона правильного треугольника равна 11. Центры трёх шаров находятся в вершинах этого треугольника. Сколько существует различных плоскостей, касающихся одновременно всех трёх шаров, если их радиусы равны: а) 7, 7, 7; б) 1, 1, 1; в) x, x, x (в этом случае ответ зависит от x); г)[(т)] 3, 4, 6?

10 (т). Стороны треугольника равны a, b и c. Три шара попарно касаются друг друга и плоскости треугольника в его вершинах. Найдите радиусы этих шаров.

3.4. Вписанные и описанные многогранники

Среди множества выпуклых многогранников выделим два важных семейства: вписанные и описанные многогранники.

Определение 22

Выпуклый многогранник называют вписанным, если все его вершины лежат на сфере. Эта сфера называется описанной для рассматриваемого многогранника.

Определение 23

Выпуклый многогранник называют описанным, если все его грани касаются сферы. Эта сфера называется вписанной для рассматриваемого многогранника.

Очевидно сходство введённых понятий с известными из курса планиметрии понятиями вписанных и описанных многоугольников, описанных и вписанных окружностей.

Не любой многогранник является вписанным или описанным, однако верны следующие две теоремы, аналогичные соответствующим теоремам про треугольник.

Теорема 3.4 *(об описанной сфере треугольной пирамиды)*

Треугольная пирамида имеет единственную описанную сферу.

3.4

Доказательство. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$ (рис. 73). Построим плоскости, перпендикулярные соответственно рёбрам AB, AC и AD и проходящие через их середины. (Геометрическим местом точек пространства, равноудалённых от концов некоторого отрезка, является плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину. Докажите это самостоятельно.) Обозначим через O точку пересечения этих плоскостей. (Такая точка существует, и она единственна. Докажем это. Возьмём первые две плоскости. Они пересекаются, поскольку перпендикулярны непараллельным прямым.

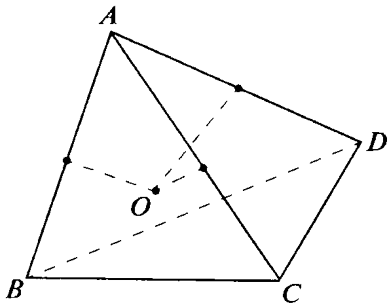


Рис. 73

Обозначим прямую, по которой пересекаются первые две плоскости, через l. Эта прямая l перпендикулярна плоскости ABC. Плоскость, перпендикулярная AD, не параллельна l и не содержит её, поскольку в противном случае прямая AD перпендикулярна l, т. е. лежит в плоскости ABC.) Точка O равноудалена от точек A и B, A и C, A и D, значит, она равноудалена ото всех вершин пирамиды $ABCD$, т. е. сфера с центром в O соответствующего радиуса является описанной сферой для пирамиды $ABCD$.

Итак, мы доказали существование для пирамиды $ABCD$ описанной сферы. Осталось доказать её единственность. Центр любой сферы, проходящей через вершины пирамиды, равноудалён от этих вершин, значит, он принадлежит плоскостям, которые перпендикулярны рёбрам пирамиды и проходят через середины этих рёбер. Следовательно, центр такой сферы совпадает с точкой O.

Теорема доказана.▼

Отметим, что при этом мы доказали, что все серединные перпендикуляры к рёбрам пирамиды пересекаются в одной точке.

Теорема 3.5
(о вписанной сфере треугольной пирамиды)

У любой треугольной пирамиды существует единственная вписанная сфера.

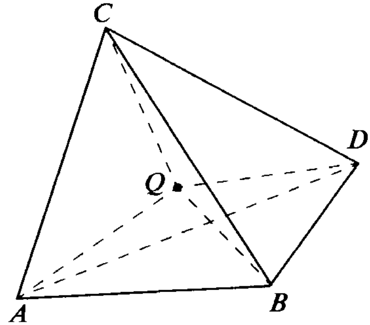
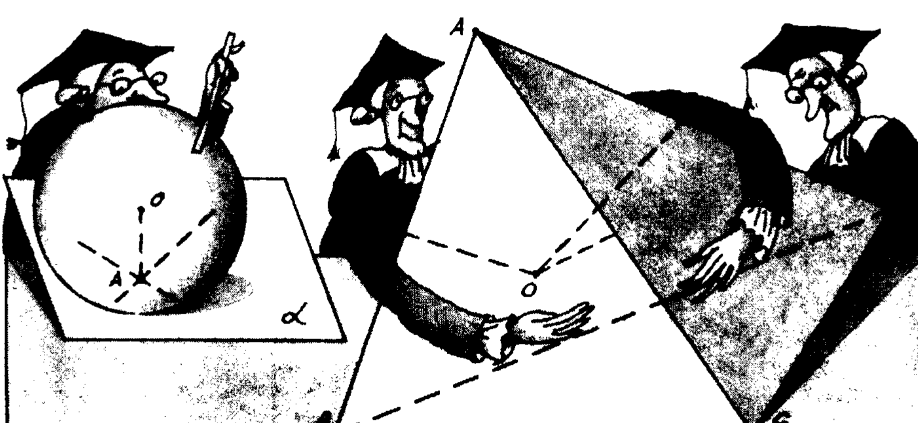


Рис. 74

Доказательство. Рассмотрим треугольную пирамиду *ABCD* (рис. 74). Проведём биссекторные плоскости её двугранных углов с рёбрами *AB*, *AC* и *BC*. Эти плоскости имеют единственную общую точку (подумайте почему). Обозначим её через *Q*. Точка *Q* равноудалена от всех граней пирамиды. (Она равноудалена от *ABC* и *ABD*, *ABC* и *ADC*, *ABC* и *CBD*.) Значит, сфера соответствующего радиуса с центром в точке *Q* является вписанной в пирамиду *ABCD*. Единственность этой сферы доказывается так же, как и в предыдущей теореме.▼

Как и в предыдущем случае, мы доказали, что все шесть биссекторных плоскостей треугольной пирамиды пересекаются в одной точке.

Замечание. Понятия вписанной и описанной сферы могут относиться также к конусу и цилиндру. Любой конус имеет описанную и вписанную сферы. Если провести осевое сечение конуса, то эта плоскость пересечёт описанную и вписанную сферы по большим окружностям этих сфер, причём получившиеся окружности будут соответственно описаны или вписаны в осевое сечение конуса. Цилиндр, как и конус, всегда имеет описанную сферу. Но в отличие от конуса вписать сферу можно не во всякий цилиндр, а лишь в цилиндр с квадратным осевым сечением.



Задачи, задания, вопросы

1 (в). Найдите радиусы описанного и вписанного шаров для правильного тетраэдра с ребром a.

2 (в). Найдите ребро куба, вписанного в сферу радиусом R.

3 (в). Докажите, что если около параллелепипеда можно описать сферу, то этот параллелепипед — прямоугольный.

4 (в). Имеется правильная пирамида со стороной основания a и боковым ребром b. Найдите радиус:
а) описанной сферы;
б) вписанного шара;
в) сферы, касающейся всех рёбер пирамиды;
г) сферы, касающейся рёбер основания и продолжений боковых рёбер;
д) радиус сферы, которая касается основания и боковых рёбер.
Каждый пункт решите для пирамиды следующего вида: 1) четырёхугольной; 2) треугольной; 3) шестиугольной.

5 (в). Найдите радиус описанного и вписанного шаров для конуса с радиусом основания r и высотой h.

6. Около шара описаны цилиндр и конус, осевым сечением которого является прямоугольный треугольник. Найдите отношение образующих цилиндра и конуса.

7 (в). Найдите радиус сферы, описанной около правильной n-угольной призмы с высотой h и стороной основания a.

8 (в). В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник со стороной 1. Найдите боковое ребро призмы, если известно, что в неё можно вписать шар.

9 (т). Известно, что в заданную призму можно вписать шар. Найдите площадь её боковой поверхности, если площадь основания равна S.

10 (т). Плоскость проходит на расстоянии a от центра единичной сферы. Найдите ребро куба, одна грань которого лежит в этой плоскости, а вершины противоположной грани находятся на сфере.

11 (в). Около призмы можно описать сферу. Докажите, что основание призмы — многоугольник, около которого можно описать окружность. Найдите радиус этой окружности, если высота призмы h, а радиус описанной около неё сферы равен R.

12 (в). Основанием пирамиды служит многоугольник, около которого можно описать окружность. Докажите, что существует сфера, описанная около этой пирамиды. Найдите радиус этой сферы, если радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен r, её высота h, а основание высоты совпадает с вершиной основания пирамиды.

13. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB равно a, а углы ACB и ADB — прямые. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

14. Найдите ребро куба, одна грань которого принадлежит основанию конуса, а остальные вершины расположены на его боковой поверхности. Радиус основания конуса равен r, его высота h.

15. Через центр сферы радиусом R проведены три попарно перпендикулярные плоскости. Найдите радиус сферы, касающейся всех этих плоскостей и данной сферы.

16. Осевым сечением конуса является правильный треугольник со стороной a. Через ось конуса проведены две перпендикулярные плоскости, которые делят конус на четыре части. Найдите радиус шара, вписанного в одну из этих частей.

17. Внутри единичного куба находятся восемь равных шаров. Каждый шар вписан в один из трёхгранных углов куба и касается трёх шаров, соответствующих соседним вершинам. Найдите радиусы этих шаров.

18 (в). Четыре сферы радиусом R попарно касаются друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех четырёх сфер.

19. Два шара касаются друг друга и граней трёхгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найдите отношение радиусов этих шаров.

20 (п). Докажите, что если в данный четырёхгранный угол можно вписать шар, то суммы противоположных плоских углов этого четырёхгранного угла равны. Докажите справедливость обратного утверждения: если суммы противоположных плоских углов четырёхгранного угла равны, то в него можно вписать шар.

21 (п). Дан трёхгранный угол $OABC$, в котором $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Пусть вписанный в него шар касается грани BOC в точке K. Найдите $\angle KOB$.

22 (т). Треугольник ABC вписан в основание конуса, S — вершина конуса. В трёхгранном угле $SABC$ двугранные углы с рёбрами SA, SB и SC равны соответственно x, y и z. Найдите угол между плоскостями SAB и SAO, где SO — высота данного конуса.

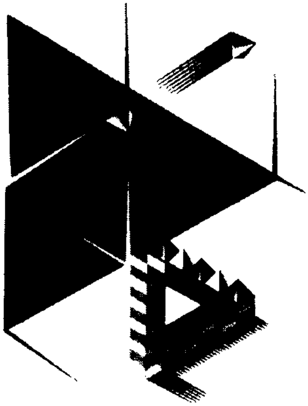
23 (т). Четырёхгранный угол $OABCD$ (OA, OB, OC, OD — его рёбра) разделён плоскостью OAC на два трёхгранных угла. В каждый из полученных углов вписан шар. Эти шары касаются плоскости OAC в точках K и M. Найдите угол KOM, если $\angle BOA = \alpha$, $\angle DOA = \beta$, $\angle BOC = \angle COD$.

24 (п). Докажите, что радиус шара, проходящего через точки пересечения медиан граней произвольного тетраэдра, в три раза меньше радиуса описанного около рассматриваемого тетраэдра шара. Используя этот факт, докажите, что в произвольном тетраэдре выполняется неравенство $R \geqslant 3r$, где R и r — соответственно радиусы описанного и вписанного шаров.

25 (т). Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно l, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

4

Задачи и методы стереометрии



4.1. Вспомогательные плоскости, сечения

Основной принцип решения большинства стереометрических задач состоит в том, что данная задача посредством различных приёмов сводится к одной или нескольким планиметрическим задачам. Очень часто это делается с помощью *вспомогательных сечений* или других *вспомогательных плоскостей*. Типичными здесь являются задачи на нахождение плоских и двугранных углов правильных пирамид, вычисление радиусов вписанных и описанных шаров для правильных пирамид, конусов и т. д.

Например, решить задачу про правильную четырёхугольную пирамиду может помочь её диагональное сечение или же сечение, проходящее через высоту и середину стороны основания (рис. 75).

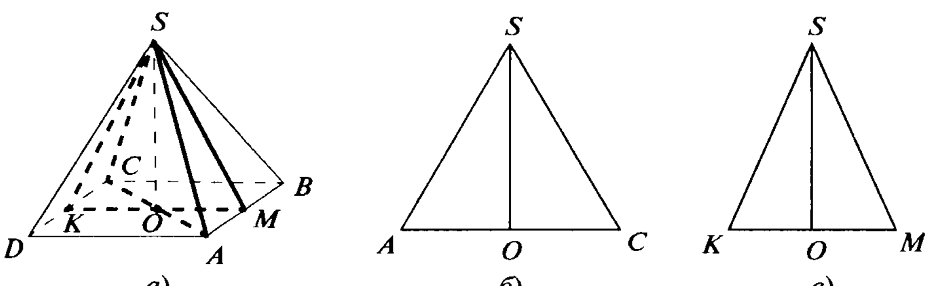


Рис. 75

4.1

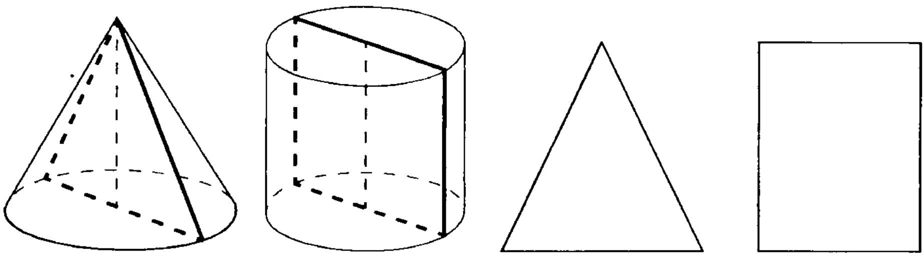


Рис. 76

В задачах про цилиндр или конус полезно рассмотреть осевое сечение (рис. 76).

Задача 1. ***Рёбра правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найти двугранные углы при основании этой пирамиды. Решить эту же задачу для правильной треугольной пирамиды.***

Решение. Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ (рис. 75, *а*). Пусть SO — высота этой пирамиды, M и K — середины AB и CD. Рассмотрим два сечения — SAC (рис. 75, *б*) и SKM (рис. 75, *в*). Имеем: $OC = OM\sqrt{2}$, $\angle SCO = \alpha$. Пусть $\angle SMO = \varphi$; тогда $SO = OC \operatorname{tg} \alpha = OM\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$. С другой стороны, $SO = OM \operatorname{tg} \varphi$. Таким образом, $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$, $\varphi = \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$.

Аналогично решается и вторая задача. Надо только рассматривать не сечения пирамиды, а два прямоугольных треугольника с общим катетом — высотой пирамиды. Вторым катетом одного из этих треугольников будет радиус описанной около основания окружности, а другого — радиус вписанной окружности. Решите задачу самостоятельно.

Ответ. $\operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$.▼

Задачи, задания, вопросы

1. Грани правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите двугранные углы между соседними боковыми гранями пирамиды.

2. Внутри четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны a, находятся четыре одинаковых шара. Каждый шар касается основания пирамиды, двух соседних боковых граней и двух других шаров. Найдите радиус каждого шара. Найдите также радиус пятого шара, касающегося четырёх данных шаров и боковых граней пирамиды.

3. Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трёх других шаров и трёх граней пирамиды. Найдите радиусы этих шаров.

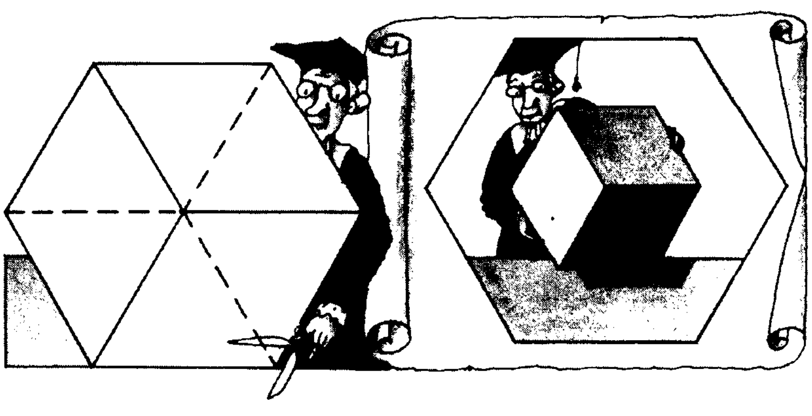
4. Два противоположных ребра единичного куба лежат в основаниях цилиндра, а остальные вершины — на его боковой поверхности. Одна из граней куба образует с основаниями цилиндра угол α ($\alpha < 90°$). Найдите высоту цилиндра.

5. Осевым сечением конуса является единичный правильный треугольник. Найдите радиус шара, касающегося оси конуса, его основания и боковой поверхности.

6. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен 60°. Найдите радиус шара, касающегося двух соседних боковых рёбер, противоположной боковой грани и основания.

4.2. Проектирование

Ещё одним распространённым методом сведения пространственной задачи к плоской является *проектирование*. Более того, этот метод присутствует в любой стереометрической задаче, ре-



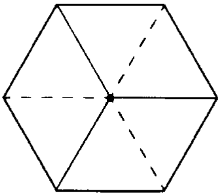


Рис. 77

шение которой сопровождается изображением заданной в условии ситуации, поскольку, делая плоский чертёж, мы, по существу, используем метод проектирования.

Суть метода состоит в том, что рассматриваемый пространственный объект проектируется на специально выбранную плоскость, в результате чего возникает плоская фигура со свойствами, позволяющими существенно облегчить решение. Очень часто полезной оказывается ортогональная проекция на плоскость, перпендикулярную некоторой прямой. (В результате такого проектирования указанная прямая переходит в точку.) Например, если куб спроектировать на плоскость, перпендикулярную его диагонали, то получим правильный шестиугольник (рис. 77).

Как известно, при проектировании сохраняется отношение отрезков, расположенных на одной прямой или параллельных между собой.

Задача 2. *Плоскость, проходящая через середины рёбер AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$, делит ребро AD в отношении* $3:1$ *(считая от вершины A). В каком отношении эта плоскость делит ребро BC?*

Решение. Пусть K и M — середины рёбер AB и CD данной пирамиды (рис. 78, *а*). Плоскость, проходящая через K и M, пересекает AD и BC соответственно в точках P и Q. Спроектируем пирамиду на плоскость, перпендикулярную прямой KM (рис. 78, *б*). Проекцией пирамиды будет параллелограмм $ABCD$. (Это следует из того, что при указанном проектировании середины AB и CD — точки K и M — спроектируются в одну точку, т. е. совпадут.) Прямая PQ (проекция этой прямой) проходит через центр получившегося параллелограмма. Значит, точка Q делит CB в том же отношении, в каком точка P делит AD, т. е. $BQ:CQ = 3:1$.▼

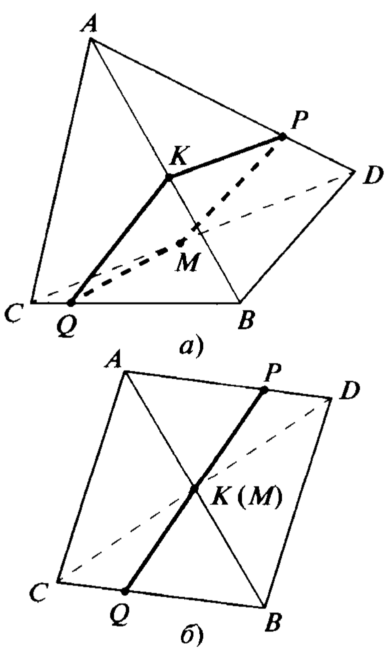


Рис. 78

Отметим, что иногда полезно рассматривать не только ортого-

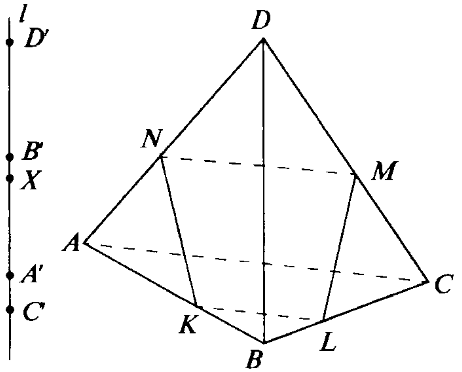


Рис. 79

нальную проекцию, но и произвольную параллельную проекцию вдоль прямой на плоскость, или даже вдоль плоскости на прямую. Как мы уже говорили, эти проекции обладают свойством сохранять отношение длин параллельных отрезков.

Задача 3*. *Пусть плоскость* α *пересекает рёбра* AB, BC, CD *и* DA *тетраэдра* $ABCD$ *в точках* K, L, M, N *соответственно. Докажите, что выполняется равенство*

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1.$$

Решение. Рассмотрим проекцию на произвольную прямую l вдоль плоскости $KLMN$. Пусть X — образ точек K, L, M и N, A' — образ точки A, B' — образ точки B, C' и D' — образы точек C и D при этой проекции (рис. 79). Тогда, как мы знаем,

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=$$

$$=\frac{A'X}{XB'}\cdot\frac{B'X}{XC'}\cdot\frac{C'X}{XD'}\cdot\frac{D'X}{XA'}=1.▼$$

Задачи, задания, вопросы

1. Две противоположные вершины единичного куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные расположены на его боковой поверхности. Найдите высоту и радиусы оснований этого цилиндра.

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведён отрезок, соединяющий вершину A с серединой ребра CC_1. В каком отношении этот отрезок делится плоскостью BDA_1?

3. Вершины A и B призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежат на оси цилиндра, а остальные — на боковой поверхности этого цилиндра. Найдите в этой призме величину двугранного угла с ребром AB.

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что прямая KM параллельна DB_1. Найдите отношение $KM : DB_1$.

4.3*. Нахождение угла и расстояния между скрещивающимися прямыми

Метод проектирования (ортогонального) можно использовать при решении задач, в которых требуется найти угол и расстояние между скрещивающимися прямыми.

Напомним, что **угол между скрещивающимися прямыми равен углу между двумя пересекающимися прямыми, параллельными этим скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине отрезка общего перпендикуляра к этим прямым** (т. е. такого отрезка AB, точка A которого лежит на одной из данных прямых, а B — на другой и который перпендикулярен обеим прямым).

Докажем, что такой отрезок существует. Рассмотрим две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 (рис. 80). Проведём через каждую из них плоскость, параллельную другой прямой, и спроектируем каждую прямую на противоположную плоскость. Получим прямые l'_1, l'_2. Если M — точка пересечения l_1 и l'_2, а K — точка пересечения прямых l'_1 и l_2, то отрезок KM перпендикулярен построенным плоскостям, следовательно, он перпендикулярен каждой из прямых l_1 и l_2. Расстояние между любыми двумя другими точками на l_1 и l_2 больше KM, поскольку этот отрезок равен расстоянию между плоскостями. Использование метода проектирования для решения задач указанного в начале параграфа вида основано на следующем утверждении.

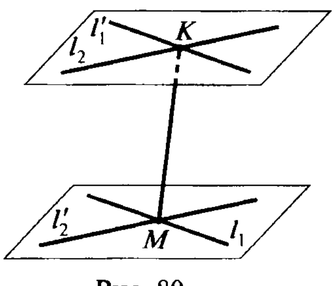


Рис. 80

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость. Угол между второй прямой и указанной её проекцией дополняет до 90° угол между данными скрещивающимися прямыми.

Сформулируем это утверждение несколько иначе и подробнее. Пусть l_1 и l_2 — две скрещивающиеся прямые (рис. 81); L — плоскость, перпендикулярная одной из них, например l_1; точка A — проекция прямой l_1 на плоскость L, прямая l_2' — проекция прямой l_2 на плоскость L. Утверждение состоит в том, что расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки A до прямой l_2'. При этом общий перпендикуляр между прямыми l_1 и l_2 проектируется в перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой l_2'.

Рассматриваемое утверждение достаточно очевидно. Пусть BC — общий перпендикуляр к прямым l_1 и l_2, AD — его проекция на плоскость L, D_1 — точка пересечения прямой l_2 с плоскостью L. Поскольку BC — общий перпендикуляр к l_1 и l_2, проекция BC на L — отрезок AD, также перпендикулярен l_1 и l_2. По теореме о трёх перпендикулярах $AD \perp l_2'$. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 81). На этом рисунке AB есть прямая l_1, CD_1 — прямая l_2, DD_1 — прямая l_2'. Очевидное равенство $AD = BC$ показывает, что расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки A до прямой l_2'. Именно это и утверждалось в первой фразе данного утверждения, касающейся расстояния между скрещивающимися прямыми.

Замечание. Как известно, при проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой. Поэтому если мы возьмём на прямой l_2 любой отрезок, содержащий точку C, то после проектирования он перейдёт в отрезок на прямой l_2',

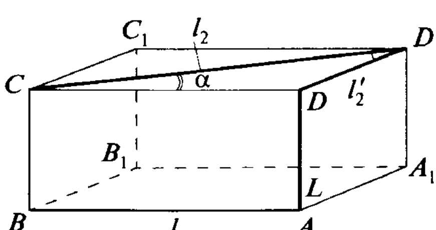


Рис. 81

содержащий точку D. При этом точки C и D делят соответствующие отрезки в одинаковом отношении.

Вторая часть утверждения касается угла между скрещивающимися прямыми. Рассмотрим рисунок 81. Прямая CD параллельна l_1, поэтому $\angle DCD_1$ равен углу между данными скрещивающимися прямыми, а $\angle DD_1C$ дополняет его до 90°. Следовательно, если на прямой l_2 взять любой отрезок длиной d, например P_1C, и обозначить через d' длину его проекции D_1D на плоскость L, то из рассмотрения треугольника CDD_1 будем иметь: $\sin\alpha = \frac{d'}{d}$, где α — угол между прямыми l_1 и l_2. ▼

Задача 4. *Найти угол и расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром* 1. *В каком отношении делит каждую из этих диагоналей их общий перпендикуляр?*

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Будем искать расстояние между диагоналями A_1B и B_1C (рис. 82, *а*). Спроектируем куб на плоскость, проходящую через точку B и перпендикулярную A_1B (рис. 82, *б*, проекции вершин куба на рисунке обозначены так же, как и на самом кубе, но с добавлением штриха). Задача сводится к нахождению расстояния от точки B' до прямой $B_1'C'$. Так как плоскость AB_1C_1D перпендикулярна прямой A_1B, то прямоугольник $A'B_1'C_1'D'$ равен прямоугольнику AB_1C_1D. Но B' — середина отрезка $A'B_1'$, следовательно, в прямоугольном треугольнике $B'B_1'C'$ катеты $B'B_1'$ и $B'C'$ равны соответственно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 1; $B_1'C' = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Пусть $B'M$ — высота к гипотенузе $B'C'$. (Из предыдущего следует, что $B'M$ — искомое расстояние.) Имеем:

$$B'M = \frac{B'B_1' \cdot B'C'}{B_1'C} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Расстояние между прямыми найдено.

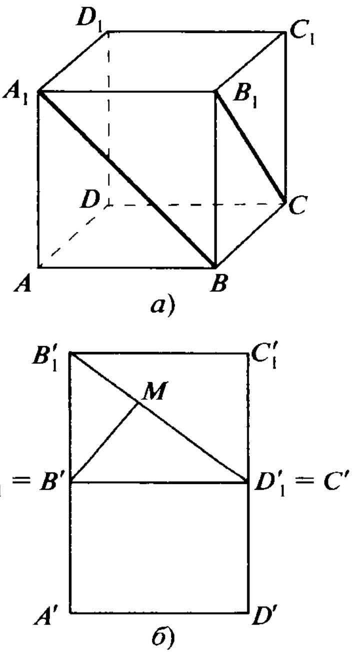


Рис. 82

2. Точка M делит отрезок $B_1'C'$ в том же отношении, в каком общий перпендикуляр к рассматриваемым диагоналям делит диагональ B_1C. Имеем простую планиметрическую задачу: определить, в каком отношении делит гипотенузу прямоугольного треугольника опущенная на неё высота, если известны катеты этого треугольника. Это отношение равно отношению квадратов соответствующих катетов. В рассматриваемом случае получаем, что искомое отношение равно 2 : 1. (Понятно, что оно одно и то же для обеих диагоналей.)

3. Найдём угол. Имеем $B_1C = \sqrt{2}$, $B_1'C' = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Если α — искомый угол, то $\sin\alpha = \frac{B_1'C'}{B_1C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 60°$.▼

Замечание. В данном случае угол можно было найти и проще. Например, так. Рассмотрим треугольник A_1BD. Этот треугольник — правильный. А поскольку $A_1D \parallel B_1C$, угол между рассматриваемыми диагоналями равен $\angle BA_1D = 60°$.

Иначе можно решить и другие пункты задачи. Предложенный способ иллюстрирует сформулированный в начале параграфа общий подход к решению подобных задач.

Задачи, задания, вопросы

1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина BB_1. Найдите угол и расстояние между следующими прямыми: а) AB_1 и D_1B; б) AB_1 и CM; в) A_1B и CM; г) AB_1 и DM; д) AC_1 и DM. В каждом случае укажите, в каком отношении общий перпендикуляр к указанным прямым делит соответствующие отрезки.

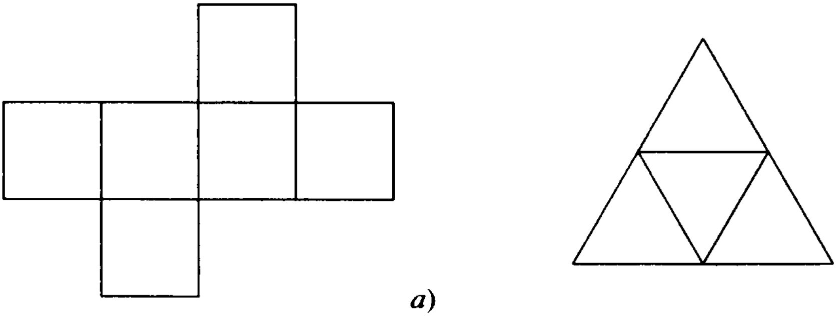
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 1 точка M — середина AB, N — середина BC, K — середина CD. Найдите угол и расстояние между следующими прямыми: а) AD и CM; б) CM и DN; в) CM и BK. Найдите также отношение, в котором общий перпендикуляр к прямым делит соответствующие отрезки.

3. Рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сколько существует различных прямых, параллельных AC и равноудалённых от прямых A_1B, AD и CC_1'? Пусть l — одна из таких прямых. Чему может быть равно расстояние от l до A_1B?

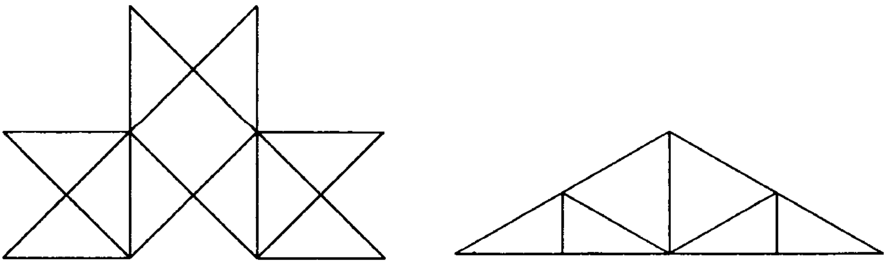
4. Два конуса имеют общее основание, радиус которого R, их высоты H и h, а вершины расположены по разные стороны от основания. Найдите угол и расстояние между двумя образующими, если известно, что их концы на окружности основания ограничивают четверть окружности.

4.4*. Развёртки

Всем, конечно, приходилось встречаться с различными развёртками многогранников. Так, развёртка куба (точнее, поверхности куба), как правило, состоит из шести равных квадратов — граней куба (рис. 83, *а*). На рисунке 83, *а* изображена также развёртка правильного тетраэдра. Обе эти развёртки получены в результате разрезания поверхности многогранника по его рёбрам.

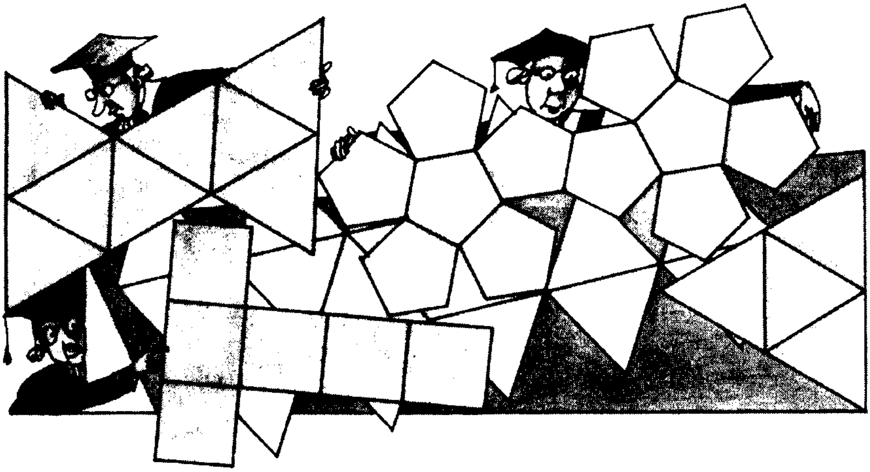


а)



б)

Рис. 83



На рисунке 83, *б* приведены развёртки куба и правильного тетраэдра, полученные путём разрезания их поверхностей не только по рёбрам.

И всё-таки что такое развёртка многогранника? Можно ли сказать, что развёрткой некоторого многогранника является плоский многоугольник, из которого может быть сложена поверхность этого многогранника без перекрытий? Решим следующую задачу.

Задача 5. *Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с основанием ABC и плоскими углами при противоположной основанию вершине, равными α. Плоскость, параллельная ABC, пересекает AD, BD и CD соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ (этот многогранник называется усечённой пирамидой) разрезана по пяти рёбрам: A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB. После чего эту поверхность развернули на плоскость. При каких значениях α получившаяся развёртка будет обязательно накрывать сама себя?*

Решение. Поверхность получившегося многогранника состоит из трёх равнобочных трапеций с углами при большем основании $90° - \frac{\alpha}{2}$ и двух правильных треугольников. Рассмотрим часть развёртки (без треугольника ABC). На рисунке 84 вершины многоугольников для простоты обозначены так же, как и соответствующие вершины многогранника. Поэтому возникли различные, но одинаково обозначенные точки. Развёртка будет самопересекаться, если отрезки B_1C_1 и A_1B_1 пересекаются, т. е. в треугольнике A_1B_1M имеет место неравенство $A_1M < A_1B_1$. Вычисляя углы этого треугольника:

$$\angle A_1B_1C_1 = 360° - 2\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 180° - \alpha,$$

$$\angle B_1A_1M = 180° - \alpha - 60° = 120° - \alpha,$$

$$\angle A_1MB_1 = 180° - (180° - \alpha) - (120° - \alpha) = 2\alpha - 120°$$

и переходя к соответствующему неравенству для его углов, получаем:

$$180° - \alpha < 2\alpha - 120°, \text{ откуда } \alpha > 100°.$$

(Понятно, что $\alpha < 120°$ — см. теорему 2.2.)▼

При решении некоторых задач развёртка может быть использована для сведения пространственной задачи к плоской, т. е. можно говорить о **«методе развёртки»**.

Задача 6. *Доказать, что если суммы плоских углов при трёх вершинах треугольной пирамиды равны* 180°, *то все грани этой пирамиды — равные треугольники* (*т. е. пирамида является равногранной*).

Решение. Понятно, что и у четвёртой вершины сумма плоских углов равна 180°. Обозначим данную пирамиду (тетраэдр) через $ABCD$ и сделаем развёртку, разрезав её поверхность по рёбрам DA, DB, DC (рис. 85). Поскольку суммы плоских углов при вершинах A, B и C равны 180°, развёрткой будет треугольник $D_1D_2D_3$, в котором A, B и C — середины рёбер. Следовательно, на самом деле все грани тетраэдра $ABCD$ — равные между собой треугольники.▼

Напомним, что развёртки бывают не только у многогранников. Развернуть на плоскость можно и боковую поверхность ци-

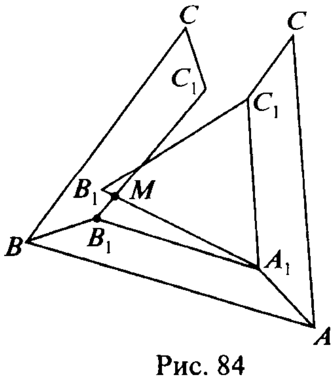


Рис. 84

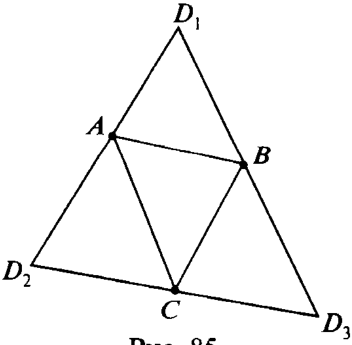


Рис. 85

линдра и конуса. А вот даже маленький кусок сферы развернуть на плоскость нельзя. И в этом заключается одна из главных проблем, с которыми сталкиваются картографы.

Задачи, задания, вопросы

1. Придумайте сами интересные развёртки правильного тетраэдра и куба.
2. Нарисуйте несколько различных развёрток правильной четырёхугольной пирамиды.
3. Докажите, что квадрат может служить развёрткой некоторой треугольной пирамиды.
4. Имеется прямоугольник со сторонами $2\sqrt{3}$ и $\frac{1}{2}$. Сложите из него поверхность правильного единичного тетраэдра.
5. Докажите, что если у тетраэдра равны два каких-то противоположных ребра и суммы плоских углов при двух вершинах равны 180°, то все его грани — равные треугольники.

4.5*. Кратчайшие пути по поверхности тела

Метод развёртки очень удобен при решении задач, в которых требуется найти кратчайший путь между двумя точками по поверхности многогранника, цилиндра или конуса. В случае многогранника мы рассматриваем цепочку граней, через которые пролегает этот путь, и последовательно «раскладываем» грани на плоскость.

Рассмотрим, например, следующую поучительную задачу.

Задача 7. *Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = AA_1 = 12$, $AD = 30$. Точка M расположена в грани ABB_1A_1 на расстоянии 1 от середины AB и на равных расстояниях от A и B. Точка N принадлежит грани DCC_1D_1 и расположена симметрично M относительно центра параллелепипеда. Найти длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда между точками M и N.*

4.5

Решение. Рассмотрим следующие случаи.

1. Путь пересекает рёбра A_1B_1 и D_1C_1 (или AB и DC, рис. 86, *а*). Длина кратчайшего пути в этом случае находится легко. Она равна

$$11 + 30 + 1 = 42.$$

2. Путь последовательно пересекает рёбра BB_1, B_1C_1, C_1D_1. Сделаем развёртку (рис. 86, *б*). Для простоты будем обозначать точки на развёртке так же, как и на параллелепипеде. По теореме Пифагора

$$MN = \sqrt{MK^2P^2 + NK^2} = \sqrt{37^2P^2 + 17^2} = \sqrt{1658}.$$

3. Путь последовательно пересекает рёбра AB, BC, B_1C_1, C_1D_1. Сделаем развёртку (рис. 86, *в*). Длина кратчайшего пути в этом случае равна

$$MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \sqrt{24^2P^2 + 32^2} = 40.$$

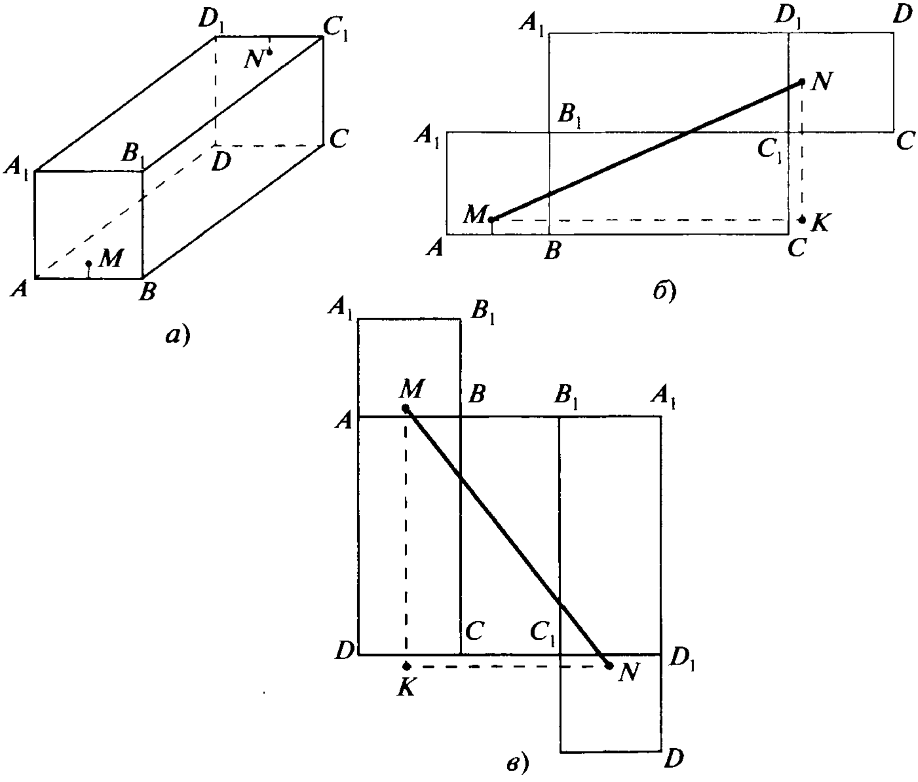


Рис. 86

Именно этот парадоксальный путь и оказывается самым коротким. Его длина равна 40. Других вариантов, кроме очевидно плохих, не осталось.▼

Задачи, задания, вопросы

1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного правильного тетраэдра между серединами его противоположных рёбер.

2. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба между его противоположными вершинами. Найдите также расстояние от середины любого ребра до самой удалённой от неё точки поверхности этого куба.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде длина бокового ребра равна b, а плоский угол при вершине равен α. Найдите длину кратчайшего замкнутого пути по поверхности пирамиды, который начинается и заканчивается в вершине основания и пересекает все боковые рёбра пирамиды.

4. Радиус основания конуса равен $\frac{2}{3}$, а длина образующей равна 2. Найдите длину замкнутого пути, пересекающего все образующие конуса и проходящего через конец одной из них, принадлежащий основанию.

5. Радиус основания цилиндра равен r, высота h. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности цилиндра между диаметрально противоположными точками разных оснований.

6. В вершине A прямоугольника $ABCD$ со сторонами a и b находится паук, а в противоположной вершине — муха. Их разделяет вертикальная стена в виде равнобедренного треугольника BDM с основанием BD и углом при вершине M, равным α. Найдите длину кратчайшего пути от паука к мухе. (Паук может двигаться лишь по той стороне плоскости прямоугольника, где находится стена, включая его границу, и по самой стене.)

4.6*. Достраивание тетраэдра до параллелепипеда

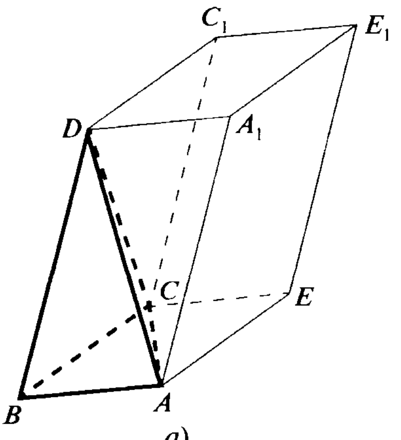
Любой тетраэдр (треугольную пирамиду) можно достроить до параллелепипеда различными способами. Выражение «достроить до параллелепипеда» означает, что исходя из данного тетраэдра мы получаем параллелепипед, четыре вершины которого являются вершинами этого тетраэдра. Например, из тетраэдра $ABCD$ (рис. 87, *а*) параллелепипед можно получить следующим образом. Достраиваем треугольник ABC до параллелограмма $ABCE$, а затем получаем параллелепипед $ABCEA_1DC_1E_1$.

При решении некоторых задач может оказаться полезным другой способ достраивания: проведём через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Получившиеся три пары соответственно параллельных плоскостей ограничивают параллелепипед. Рёбра исходного тетраэдра являются диагоналями граней получившегося параллелепипеда (рис. 87, *б*). Этот приём часто используется, когда в условии фигурируют какие-то пары противоположных рёбер тетраэдра.

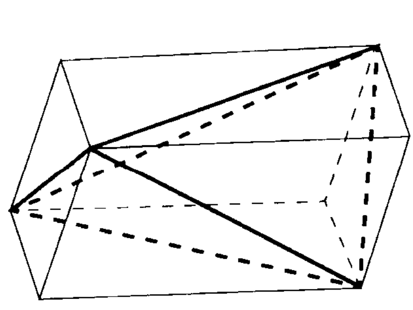
Полезно запомнить, что если в тетраэдре противоположные рёбра попарно равны — такой тетраэдр называется **равногранным**, поскольку все его грани являются равными между собой треугольниками, — то при указанном достраивании получается прямоугольный параллелепипед (подумайте почему).

Решим, например, следующую задачу.

<u>Задача 8.</u> *Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны a, два других равны b, два оставшихся — c. Найти косинус угла между рёбрами длины a.*



а)



б)

Рис. 87

Решение. Достроим данный тетраэдр (треугольную пирамиду) до параллелепипеда, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Получаем прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 88). Пусть в исходном тетраэдре ACB_1D_1 имеют место следующие равенства: $AC = B_1D_1 = a$, $AD_1 = B_1C = b$, $AB_1 = D_1C = c$. Искомый угол равен углу между диагоналями прямоугольника $ABCD$. Положим $AB = x$, $AD = y$, $AA_1 = z$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 = b^2, \\ z^2 + x^2 = c^2. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получаем

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Затем найдём

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2), \qquad y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2).$$

Пусть для определённости $c \geqslant b$; тогда $y \leqslant x$ (см. рис. 88). Если α — искомый угол, то $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{a}$, $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{2x^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - b^2}{a^2}$. Так как угол между прямыми всегда острый (по определению), нам пришлось бы брать $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{a}$ при $c \leqslant b$. В итоге получаем следующий ответ.

Ответ. $\frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$. ▼

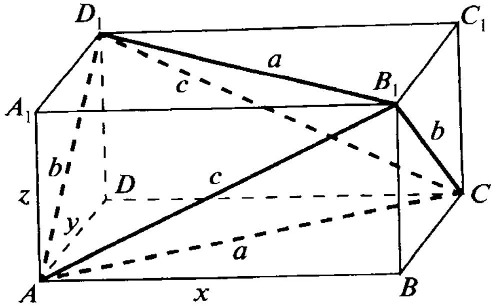


Рис. 88

Задача

Противоположные рёбра тетраэдра равны a и a, b и b, c и c. Найдите радиус описанной и радиус вписанной сферы. Докажите, что их центры совпадают.

4.7. Касание круглых тел

Из всех пространственных тел наиболее неудобен для изображения шар. Как правило, шар, а тем более несколько шаров, не изображают, а указывают его центр (или центры), радиус в точку касания и т. п. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 9. *Четыре сферы радиусом R попарно касаются между собой. Найти радиус сферы, касающейся всех этих сфер.*

Решение. Центры данных сфер служат вершинами правильного тетраэдра с ребром $2R$ (рис. 89). Поскольку данные сферы попарно касаются друг друга, искомая сфера касается их всех одинаковым образом — внешним или внутренним. Любые другие случаи касания невозможны. Отсюда следует, что центр искомой сферы расположен в центре тетраэдра. Радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром a, равен $a\frac{\sqrt{6}}{4}$ (см. задачу 1 к § 3.4). В рассматриваемом случае этот радиус равен $R\frac{\sqrt{6}}{2}$. Если искомая сфера касается данных внешним образом, то её радиус равен $R\frac{\sqrt{6}}{2} - R$. В случае внутреннего касания (искомая сфера содержит данные) её радиус равен $R\frac{\sqrt{6}}{2} + R$.▼

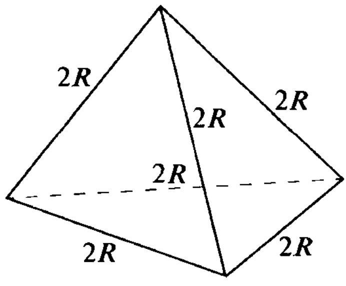


Рис. 89

При решении задач о касании круглых тел очень часто используются описанные в этой главе приёмы: проведение вспомогательных сечений, проектирование. Решим, например, следующую задачу.

Задача 10. *Конус и цилиндр имеют равные основания и равные высоты. Их основания принадлежат одной плоскости и касаются друг друга. Два равных шара, радиус каждого из которых равен радиусу основания конуса (и цилиндра), касаются между собой, боковых поверхностей конуса и цилиндра и плоскости, содержащей другое основание цилиндра и вершину конуса. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.*

Решение. Рассмотрим плоскость, проходящую через верхнее основание цилиндра и вершину конуса. Пусть A и B — концы осей цилиндра и конуса, принадлежащие этой плоскости; C и D — точки касания шаров с этой плоскостью (рис. 90, *а*); r — радиус шаров, а также оснований конуса и цилиндра. Из того, что основания конуса и цилиндра касаются между собой, следует равенство $AB = 2r$. Поскольку шары касаются между собой, $CD = 2r$. А из условия касания шаров и боковой поверхности цилиндра следуют равенства $CA = DA = 2r$. Далее, так как $DA = BA = CA = 2r$, $\angle DAB = \angle BAC = 30°$, получаем, что

$$DB = BC = 4r\sin 15° = 4r\sin(45° - 30°) = r(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Рассмотрим плоскость, проходящую через ось конуса и точку C (рис. 90, *б*). Пусть O — центр шара, α — половина угла при вершине осевого сечения конуса. Из условия касания шара с боковой поверхностью конуса следует, что

$$\angle CBO = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ т. е.}$$

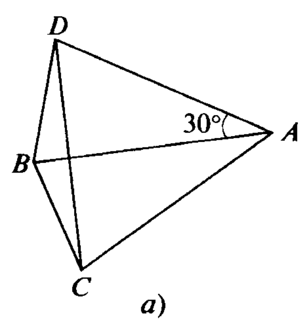
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

откуда, поскольку $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ — острый угол, получаем

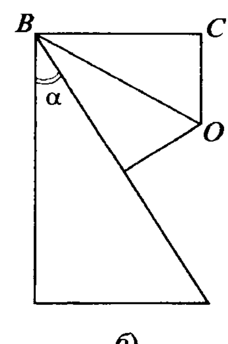
$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ. Угол при вершине конуса в его осевом сечении равен

$$\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. ▼$$



а)



б)

Рис. 90

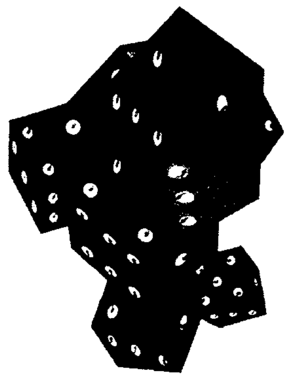
Задачи, задания, вопросы

1. Три шара радиусом R попарно касаются между собой и некоторой плоскости. Найдите радиус шара, касающегося данных шаров и той же плоскости.
2. Два равных шара касаются между собой и граней двугранного угла величины α. Первый шар касается одной из граней в точке A, а второй шар касается другой грани в точке B. Какая часть отрезка AB находится вне шаров?
3. Основания трёх равных конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга. Осевым сечением каждого конуса является правильный треугольник со стороной a. Найдите радиус шара, касающегося боковой поверхности каждого конуса и плоскости, в которой расположены их основания.
4. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в единичный куб так, что ось цилиндра лежит на диагонали куба, а каждое основание касается трёх граней куба в их центрах.
5. Центры четырёх шаров радиусом r ($r < 1$) расположены в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными 2, и в середине его гипотенузы. Найдите радиус шара, касающегося этих четырёх шаров. Сколько существует таких шаров при каждом r?
6. Через центр сферы радиусом R проведена плоскость. Три равных шара касаются сферы, проведённой плоскости и между собой. Найдите радиусы этих шаров.
7. Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трёх других и одной плоскости. Найдите отношение радиуса большего шара к меньшему.
8. Шар радиусом R касается некоторой плоскости. Какое наибольшее число шаров радиусом R могут одновременно, не пересекаясь, касаться данного шара и плоскости?
9. Четыре равных конуса расположены так, что все они имеют общую вершину и каждый касается трёх других. Чему равен угол в осевом сечении каждого конуса?
10. Можно ли расположить в пространстве 13 равных шаров так, чтобы они не пересекались и при этом 12 из них касались одного шара?

11 класс

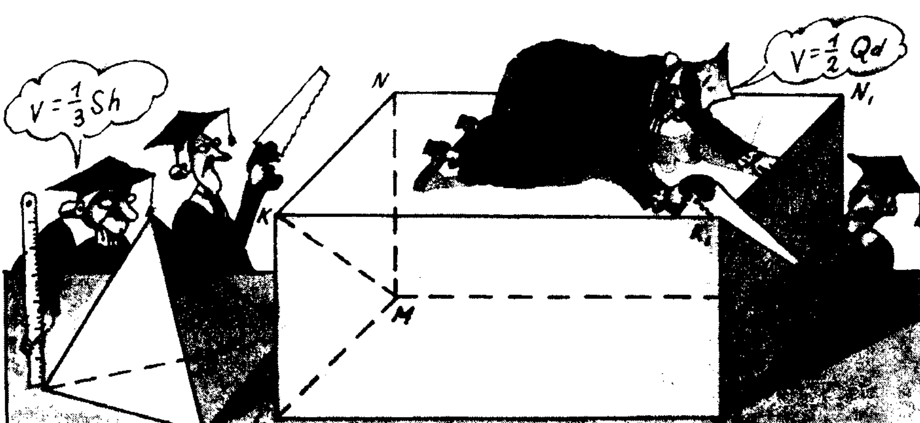
5

Объёмы многогранников



5.1. Что такое объём?

Одной из важнейших числовых характеристик ограниченной плоской фигуры является её площадь. Величину ограниченного тела характеризует его объём. С понятием объёма, с некоторыми формулами для вычисления объёмов вам уже приходилось встречаться не только на уроках по самым разным предметам, но и в повседневной жизни. В каком-то смысле понятие объёма является первичным и более естественным, чем понятие площади. В частности, нетрудно предложить удобные с практической точ-



ки зрения методы измерения объёмов тел самой замысловатой формы, например измеряя количество воды, вытесненной этим телом. В то время как практически измерить площадь фигуры, ограниченной некой сложной линией, или же найти площадь фигуры, расположенной на искривлённой поверхности, не так просто. Более того, некоторые практические способы измерения подобных площадей являются, по существу, способом измерения объёма. Например, площадь поверхности тела можно оценить, зная объём краски, потраченной на её окрашивание.

Математическая теория объёмов строится аналогично теории площадей плоских фигур. Будем следовать известной схеме, но при этом для простоты и удобства в начале будем рассматривать лишь многогранники, хотя сформулированные далее свойства объёмов относятся к телам общего вида.

Определение 24

Каждому телу можно поставить в соответствие положительное число, которое называется объёмом этого тела. При этом выполняются следующие условия.

1. Объёмы равных тел равны.

2. Если тело разделено на две части, то его объём равен сумме объёмов его частей (свойство аддитивности объёма).

3. Если задана единица длины, то объём куба, ребро которого равно этой единице, равен одной кубической единице (1 ед.^{3}).

Например, объём куба с ребром 1 см равен одному кубическому сантиметру (1 см^3).

Следствие

Из свойств 1—3 непосредственно следует, что объём куба с ребром, равным $\frac{1}{n}$ единицы (ед.), где n — натуральное число, равен $\frac{1}{n^3}$ кубических единиц (ед.^{3}).

В самом деле, разобьём каждое ребро единичного куба на n равных частей и проведём через точки деления плоскости, параллельные его граням (рис. 91). Куб

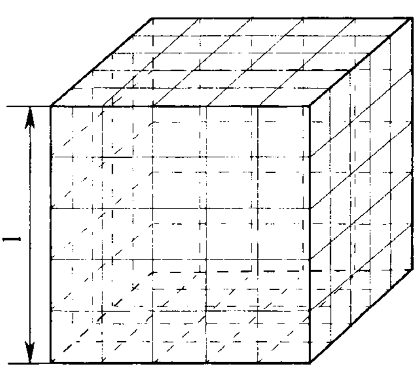


Рис. 91

объёмом 1 окажется разделённым на n^3 равных кубиков. В соответствии со свойствами 1—3 объём каждого из них равен $\frac{1}{n^3}$ (ед.).

Замечание. Далее мы не всегда будем указывать единицы объёма, а просто будм писать: объём равен V, объём равен 3 и т. д.

5.2. Объём прямоугольного параллелепипеда

Теорема 5.1 *(формула объёма прямоугольного параллелепипеда)*

Объём прямоугольного параллелепипеда может быть найден по формуле

$$V = abc, \qquad (1)$$

где a, b и c — длины рёбер этого параллелепипеда, выходящих из одной вершины.

Сравните формулу (1) с формулой площади прямоугольника.

Доказательство. Разобьём доказательство этой теоремы на несколько этапов.

1. Докажем сначала формулу (1) для случая, когда длины всех рёбер параллелепипеда выражаются рациональными числами. Приведём эти числа к общему знаменателю. Пусть $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{k}{n}$, $c = \frac{p}{n}$. Разделим рёбра данного параллелепипеда соответственно на m, k и p равных частей и проведём через точки деления плоскости, параллельные граням параллелепипеда (рис. 92). Эти плоскости разделят параллелепипед на mkp равных кубиков

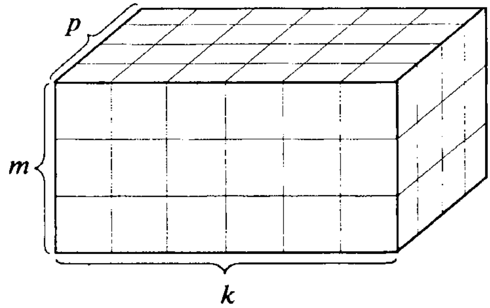


Рис. 92

с ребром $\frac{1}{n}$. Как мы знаем (см. следствие из свойств объёма), объём каждого кубика равен $\frac{1}{n^3}$. Из свойств 1 и 2 получаем, что объём параллелепипеда равен $V = mkp \cdot \frac{1}{n^3} = abc$ (ед.^{3}). Таким образом, формула (1) для этого случая доказана.

2. Пусть длины двух рёбер параллелепипеда выражаются рациональными числами. Предположим, что рациональными являются a и b. Возьмём произвольное натуральное n и определим натуральное p так, что $\frac{p}{n} \leqslant c < \frac{p+1}{n}$. Рассмотрим два параллелепипеда с рёбрами a, b, $\frac{p}{n}$ и a, b, $\frac{p+1}{n}$. Объёмы этих параллелепипедов (случай 1) равны $ab\,\frac{p}{n}$ и $ab\,\frac{p+1}{n}$. Если V — объём рассматриваемого параллелепипеда, то из свойств объёма следует, что

$$\frac{abp}{n} \leqslant V < \frac{ab(p+1)}{n},$$

или

$$\frac{abp}{n} - abc \leqslant V - abc < \frac{ab(p+1)}{n} - abc,$$

$$ab\left(\frac{p}{n} - c\right) \leqslant V - abc < ab\left(\frac{p+1}{n} - c\right). \qquad (*)$$

Но из неравенств $\frac{p}{n} \leqslant c < \frac{p+1}{n}$ следует, что $p \leqslant nc$, $p > nc - 1$. Заменим в левой части неравенства (*) p меньшей величиной $(nc - 1)$, а в правой части — большей величиной (nc). Получим

$$-\frac{ab}{n} \leqslant V - abc < \frac{ab}{n},$$

или

$$|V - abc| \leqslant \frac{ab}{n}.$$

Последнее неравенство верно при всех натуральных n. Это возможно лишь в том случае, если $V = abc$.

3. Пусть у рассматриваемого параллелепипеда длина одного из рёбер выражается рациональным числом. Предположим, это ребро длиной a. Как и в случае 2, возьмём произвольное натуральное n и определим натуральное p так, что $\frac{p}{n} \leqslant c < \frac{p+1}{n}$.

Рассмотрим, как и в случае 2, два параллелепипеда с рёбрами a, b, $\frac{p}{n}$ и a, b, $\frac{p+1}{n}$. Их объёмы равны $ab\frac{p}{n}$ и $ab\frac{p+1}{n}$, поскольку у каждого из параллелепипедов длины по крайней мере двух рёбер выражаются рациональными числами. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют соответствующие рассуждения пункта 2.

4. Случай, когда длины всех рёбер параллелепипеда выражаются иррациональными числами, сводится к случаю 3 точно так же, как случай 3 был сведён к случаю 2.▼

5.3. Объём призмы

<u>***Теорема 5.2*** *(основная формула для объёма призмы)*</u>

Для объёма произвольной призмы справедлива формула

$$V = Sh, \tag{2}$$

где S — площадь основания призмы, h — её высота (расстояние между плоскостями оснований).

Доказательство. Докажем сначала формулу (2) для четырёхугольной призмы — параллелепипеда.

Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведём две плоскости, перпендикулярные прямой AB, на расстоянии друг от друга, равном длине AB. Пусть эти плоскости не пересекают данный параллелепипед. Рассмотрим параллелепипед $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$, вершинами которого служат точки пересечения этих плоскостей с прямыми AB, CD, A_1B_1, C_1D_1 (рис. 93). Параллелепипеды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ имеют равные объёмы.

Это следует из того, что объём второго параллелепипеда можно получить из объёма первого, если прибавить объём многогранника $BCC_1B_1B'C'C_1'B_1'$, а затем вычесть объём многогранника $ADD_1A_1A'D'D_1'A_1'$. Но эти многогранники равны. Итак, мы доказали, что у параллелепипедов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ объёмы равны. При этом у параллелепипеда $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ все грани, кроме, быть может, $A'D'D_1'A_1'$ и $B'C'C_1'B_1'$, — прямоугольники.

Теперь точно так же, проведя две плоскости, перпендикулярные прямой $A'D'$, на расстоянии $A'D'$ друг от друга, построим

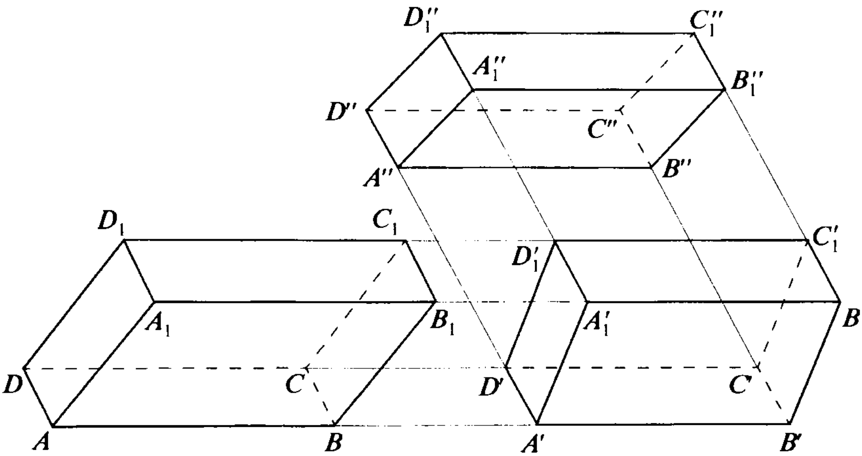


Рис. 93

параллелепипед $A'B''C''D''A_1''B_1''C_1''D_1''$ (см. рис. 93). Этот параллелепипед является прямоугольным; его объём равен объёму исходного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; площадь прямоугольника $A''B''C''D''$ равна площади параллелограмма $ABCD$; расстояние между $A''B''C''D''$ и $A_1''B_1''C_1''D_1''$ равно расстоянию между гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ исходного параллелепипеда. Значит, если S — площадь $ABCD$, h — высота к этой грани в исходном параллелепипеде, то его объём, равный объёму параллелепипеда $A''B''C''D''A_1''B_1''C_1''D_1''$, равен Sh.

Отметим, что таким же способом удобно доказывать формулу для площади параллелограмма: продолжим его стороны и проведём прямые, им перпендикулярные, на расстоянии, равном соответствующей стороне. Получим прямоугольник той же площади, что и параллелограмм, стороны которого равны a и h, откуда площадь параллелограмма равна $h \cdot a$ (h — высота).

Докажем теперь справедливость формулы (2) для треугольной призмы. Рассмотрим треугольную призму $KLMK_1L_1M_1$ и достроим её до параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 94). Очевидно, что объём исходной призмы составляет половину объёма получившегося параллелепипеда (вторая призма, дополняющая нашу до параллелепипеда, центрально-

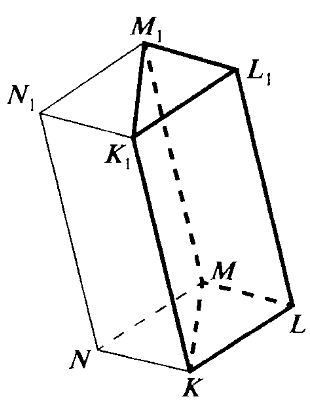


Рис. 94

симметрична исходной относительно центра параллелепипеда, а значит, объёмы этих призм равны), а площадь её основания KLM равна половине площади параллелограмма $KLMN$. Из этого следует справедливость формулы (2) для треугольной призмы. А так как произвольную призму можно разрезать на треугольные, разрезав сначала на треугольники её основания, то, значит, формула (2) верна для произвольной призмы.▼

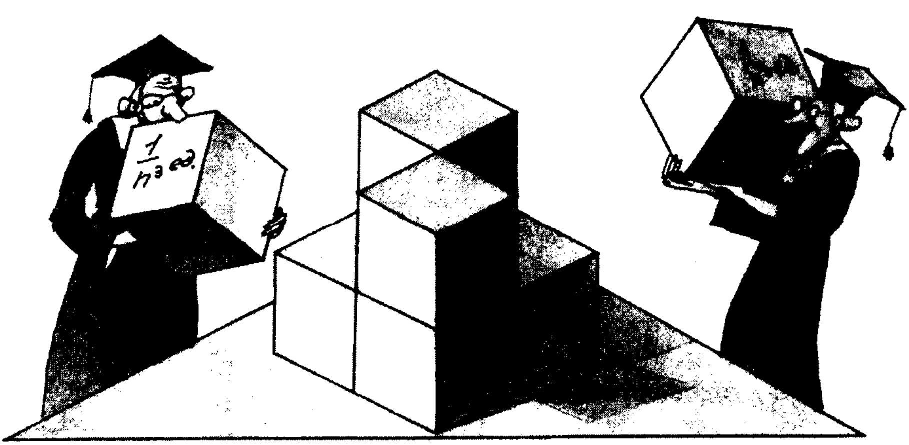
Для нахождения объёма треугольной призмы можно предложить ещё одну полезную формулу.

Теорема 5.3 *(формула для вычисления объёма треугольной призмы через площадь боковой грани)*

Пусть Q — площадь одной из боковых граней треугольной призмы, d — расстояние от противоположного ребра до этой грани. Тогда объём этой призмы может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{2} Qd. \qquad (3)$$

Доказательство. Воспользуемся рисунком 94. Как мы знаем, объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ в два раза больше объёма призмы $KLMK_1L_1M_1$. Пусть площадь грани KLL_1K_1 равна Q, а расстояние до неё от MM_1 равно d. Найдём объём параллелепипеда, взяв за основание грань KLL_1K_1. Получим, что он равен Qd. Объём призмы равен половине этого параллелепипеда, т. е. $\frac{1}{2}Qd$.▼



Задачи, задания, вопросы

1 (в). Пусть P, Q и L — площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда. Найдите его объём.

2 (в). Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует углы 60 и 45° с двумя из его рёбер. Найдите объём параллелепипеда.

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует углы α и β с двумя из его граней. Найдите объём параллелепипеда.

4 (в). Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и 2. Найдите его объём.

5. Найдите объём правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 1.

6. Несколько единичных кубиков последовательно располагаются в пространстве так, что каждый кубик, начиная со второго, имеет общую грань с предыдущим. Кубики не пересекаются и образуют многогранник. Найдите его объём, если длина ломаной, получающейся при последовательном соединении центров кубиков, равна 101.

7. Расстояния от трёх вершин параллелепипеда до противоположных граней равны 2, 3 и 4. Сумма площадей всех его граней (полная поверхность) равна 36. Найдите площади граней этого параллелепипеда.

8. Высота пирамиды равна 3, а площадь основания равна 9. Найдите объём призмы, одно основание которой принадлежит основанию пирамиды, а противоположное основание является сечением пирамиды плоскостью, проходящей на расстоянии 1 от вершины. Найдите наибольший возможный объём таких призм (меняется расстояние от «верхнего» основания до вершины пирамиды).

9. Найдите объём параллелепипеда, две грани которого являются ромбами со стороной 1 и острым углом 60°, а оставшиеся — квадраты.

10 (п). В вершинах A, B и C равностороннего треугольника ABC со стороной 1 восставлены перпендикуляры к плоскости ABC и на них взяты точки A_1, B_1 и C_1, находящиеся по одну сторону от плоскости ABC, так, что $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $CC_1 = 6$. Найдите объём многогранника $ABCA_1B_1C_1$.

11 (п). В вершинах единичного квадрата к его плоскости восставлены перпендикуляры и на них по одну сторону от плоскости квадрата взяты точки на расстояниях от его плоскости (в порядке обхода) 3, 4, 6, 5. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются указанные точки и вершины квадрата.

12. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, площади диагональных сечений которого равны $\sqrt{13}$, $2\sqrt{10}$, $3\sqrt{5}$.

13. Каркас куба изготовлен из деревянных брусьев, сечением которых является квадрат со стороной 1. Ребро куба равно 8. Найдите объём каркаса.

14. Внутри куба с ребром, равным 10, рассматриваются следующие множества точек:
а) точки, которые удалены на расстояние, не превышающее 1, ровно от трёх граней куба;
б) точки, которые удалены на расстояние, не превышающее 1, ровно от двух граней куба;
в) точки, которые удалены на расстояние, не превышающее 1, точно от одной грани куба.
Найдите объёмы тел, состоящих из указанных точек.

15 (т). Найдите объём параллелепипеда, все грани которого — равные ромбы со стороной 1 и острым углом 60°.

16 (т). На ребре единичного правильного тетраэдра взята точка, делящая это ребро в отношении 1 : 2. Через эту точку проведены две плоскости, параллельные двум граням тетраэдра, отсекающие от тетраэдра пирамиды. Найдите объём оставшейся части.

17 (п). Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность правильной $2n$-угольной призмы, но не пересекающая её оснований, делит ось призмы, её боковую поверхность и объём в одном и том же отношении.

5.4. Принцип подобия

В пространстве, как и на плоскости, каждая фигура или тело задаёт семейство подобных между собой фигур или тел (речь идёт о евклидовом пространстве и евклидовой плоскости). Существование подобия является характерной особенностью изучаемой нами геометрии.

Но хотя понятие подобия распространяется на любые пространственные формы, мы вначале ограничимся определением подобия многогранников.

Определение 25

Два многогранника называются подобными, если все их грани — подобные между собой, одинаково расположенные относительно друг друга многоугольники, а соответствующие двугранные углы равны.

Подобие произвольных тел определяется точно так же, как и подобие произвольных фигур на плоскости. Для многогранников основным является следующее очевидное утверждение.

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от неё подобную ей пирамиду.

Как и на плоскости, в пространстве связь между двумя подобными телами выражается коэффициентом подобия.

Для двух подобных многогранников отношение любых двух соответствующих рёбер постоянно и равно коэффициенту подобия.

Мы знаем, что отношение площадей двух подобных между собой фигур равно квадрату коэффициента подобия. Для отношения объёмов двух подобных многогранников справедливо следующее утверждение.

Принцип подобия для объёмов

Отношение объёмов двух подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

Справедливость принципа для подобных между собой параллелепипедов или призм непосредственно следует из полученных нами формул для объёмов. Не очень сложно, хотя и громоздко, доказывается принцип подобия для произвольных многогранников. (Возьмём два подобных между собой многогранника и начнём один из них заполнять всё более и более мелкими параллелепипедами. С увеличением числа таких параллелепипедов их общий объём приближается к объёму заполняемого ими многогранника. Теперь возьмём подобный многогранник и начнём его заполнять соответственно подобными параллелепипедами и т. д. Самое сложное в этом рассуждении — аккуратно описать, каким образом происходит переход к пределу.) Принцип подобия верен и для произвольных тел.

Задачи, задания, вопросы

1 (в). На боковом ребре пирамиды взяты две точки, делящие ребро на три равные части. Через них проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите объём части пирамиды, заключённый между этими плоскостями, если объём всей пирамиды равен 1.

2 (п). Центр шара радиусом 1 расположен на ребре двугранного угла величиной α. Найдите радиус шара, объём которого равен объёму части данного шара, находящегося внутри двугранного угла.

3 (в). Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит её объём на две равные части. В каком отношении эта плоскость делит боковые рёбра пирамиды?

4. Площадь основания пирамиды равна 3, объём пирамиды также равен 3. Проведены две плоскости, параллельные основанию пирамиды. Площади получившихся сечений равны 1 и 2. Найдите объём части пирамиды, расположенной между плоскостями.

5.5. Объём пирамиды

Сформулированный в предыдущем параграфе принцип подобия позволяет получить формулу объёма пирамиды.

Теорема 5.4 *(основная формула для объёма пирамиды)*

Объём пирамиды может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3}Sh, \qquad (4)$$

где S — площадь основания пирамиды, h — её высота.

Доказательство. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$. Пусть площадь основания ABC равна S, а высота, опущенная на него, равна h. Обозначим середины рёбер этой пирамиды, как на рисунке 95. Соединив эти середины, мы разрежем пирамиду на четыре многогранника: две треугольные пирамиды $KMLD$ и $CPQK$ и две треугольные призмы $QNBKML$ и $PQKANM$. Если V — объём пирамиды $ABCD$, то объёмы пирамид $KMLD$ и $CPQK$ в соответствии с принципом подобия равны $\left(\frac{1}{2}\right)^3 V = \frac{1}{8} V$. Объём призмы $QNBKML$ найдём по формуле (2).

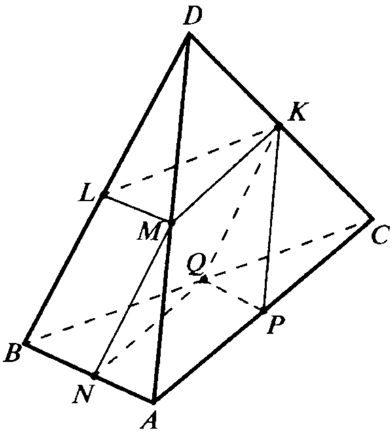


Рис. 95

Площадь основания QNB равна $\frac{S}{4}$, высота $\frac{h}{2}$. Значит, объём этой призмы равен $\frac{S}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} Sh$. Для нахождения объёма второй призмы воспользуемся формулой (3). Площадь боковой грани $APQN$ этой призмы равна $\frac{S}{2}$, расстояние до неё от ребра KM равно $\frac{h}{2}$. Объём этой призмы равен $\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} Sh$. Таким образом, представив объём всей пирамиды V в виде суммы объёмов двух указанных пирамид и двух призм, получим:

$$V = 2\,\frac{V}{8} + 2\,\frac{Sh}{8}, \text{ откуда } V = \frac{1}{3} Sh.$$

Таким образом, для треугольных пирамид формула (4) верна. Значит, она верна и для произвольных пирамид. ▼

Замечание. В курсе планиметрии мы доказывали формулу для площади треугольника, разрезав его на части, из которых потом сложили прямоугольник. В стереометрии подобные идеи не срабатывают (можно строго доказать, что разрезать тетраэдр на части, из которых можно сложить параллелепипед, как правило, невозможно). Именно поэтому все доказательства формулы для объёма тетраэдра содержат в том или ином виде предельный переход. В нашем случае он содержится в использованном нами принципе подобия.

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Найдите объём правильного тетраэдра с ребром a.

2 (в). Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. Найдите объёмы пирамид $ABCC_1$, ACA_1D_1, $ABDB_1$. Найдите также объём многогранника, вершинами которого являются центры граней данного параллелепипеда.

3 (в). Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны a, b и c. Найдите объём этой пирамиды.

4. Найдите высоту треугольной пирамиды, боковые рёбра которой 2, 3 и 4 и попарно перпендикулярны.

5. Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро равно 2.

6. Найдите объём треугольной пирамиды, пять рёбер которой равны 2, а шестое равно $\sqrt{6}$.

7. По двум скрещивающимся прямым перемещаются два отрезка (длина каждого постоянна). Докажите, что объём тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков постоянен.

8. Пусть a, b, h, R, r и Q — соответственно сторона основания, боковое ребро, высота, радиус описанного шара, радиус вписанного шара и площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды. Рассмотрим два случая: а) пирамида треугольная; б) пирамида четырёхугольная. Для каждого пункта выразите объём пирамиды через любые две из перечисленных величин. Результат работы оформите в виде таблицы 6×6. По краям таблицы (сверху и справа) выпишите указанные величины, а в клетки, кроме расположенных на диагонали, впишите соответствующие формулы, причём над диагональю — формулы для пункта а), а под диагональю — для пункта б).

Замечание. Можете оставить незаполненными клетки, соответствующие следующим парам: b и r, R и r, Q и R, Q и r.

9 (вп). Пусть a, b, h, R, r и Q — те же величины, что и в предыдущей задаче; α, β, γ и φ — величины следующих углов: плоского угла при вершине, угла наклона бокового ребра к основанию, угла наклона боковой грани к основанию и двугранного угла между двумя боковыми гранями правильной треугольной пирамиды соответственно. Выразите объём правильной треугольной пирамиды через всевозможные пары величин, одна из которых берётся из первой группы величин (a, b, ...), а другая — из второй. Результат следует оформить в виде таблицы.

10. Решите задачу, полученную из задачи 9 заменой слов «правильная треугольная» на «правильная четырёхугольная».

11. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — единичный куб. Найдите объём общей части двух треугольных пирамид ACB_1D_1 и A_1C_1BD.

12. В каком отношении делит объём куба плоскость, перпендикулярная его диагонали и делящая её в отношении: а) 2 : 1; б) 3 : 1?

13 (п). Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 2$, $BC = 3$, отрезок KM параллелен AB и расположен на расстоянии 1 от плоскости $ABCD$, $KM = 5$. Найдите объём многогранника $ABCDKM$.

14 (т). Существует ли треугольная пирамида, высоты которой равны 1, 2, 3 и 6?

15 (т). Объём пирамиды $ABCD$ равен 1. Две плоскости, параллельные AB и CD, делят BC на три равные части. Найдите объём части пирамиды, расположенной между этими плоскостями.

5.6. Вычисление объёмов многогранников

В этом параграфе будет получено несколько формул, удобных для вычисления объёмов некоторых многогранников, в первую очередь тетраэдра. Но вначале докажем одну полезную теорему, которую часто используют при решении различных стереометрических задач.

5.6

<u>***Теорема 5.5*** *(об отношении объёмов треугольных пирамид)*</u>

Рассмотрим три прямые, не лежащие в одной плоскости и проходящие через общую точку D. Пусть A_1 и A_2 — какие-то две точки на одной прямой, B_1 и B_2 — на другой, C_1 и C_2 — на третьей, V_1 — объём тетраэдра (треугольной пирамиды) $A_1B_1C_1D$, V_2 — объём тетраэдра $A_2B_2C_2D$. Тогда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{DA_1}{DA_2} \cdot \frac{DB_1}{DB_2} \cdot \frac{DC_1}{DC_2}.$$

Доказательство. Обозначим через h_1 и h_2 соответственно расстояния от точек C_1 и C_2 до плоскости DA_1B_1 (она же плоскость DA_2B_2, рис. 96). Имеем

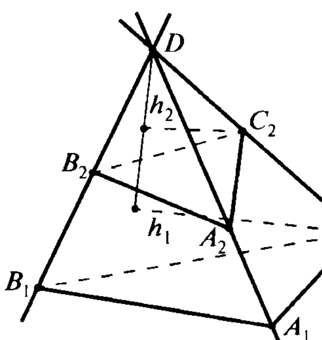


Рис. 96

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{DC_1}{DC_2}, \quad V_1 = \frac{1}{3}h_1S_{DA_1B_1},$$

$$V_2 = \frac{1}{3}h_2S_{DA_2B_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{DA_1B_1}}{S_{DA_2B_2}} \cdot \frac{h_1}{h_2} =$$

$$= \frac{DA_1}{DA_2} \cdot \frac{DB_1}{DB_2} \cdot \frac{DC_1}{DC_2}.$$

(В последнем равенстве мы использовали планиметрический факт, что площади треугольников DA_1B_1 и DA_2B_2, у которых углы при вершине D либо равны, либо дополняют друг друга до 180°, относятся как произведения сторон, выходящих из вершины D.)▼

Замечание. Если точки $A_2B_2C_2$ лежат не на лучах DA_1, DB_1 и DC_1, а на соответствующих прямых, то тетраэдры $DA_1B_1C_1$ и $DA_2B_2C_2$ могут быть расположены не так, как на рисунке 96. Заключение теоремы при этом не меняется.

<u>***Теорема 5.6*** *(объём описанного многогранника)*</u>

Объём описанного многогранника может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{3}rS, \tag{5}$$

где r — радиус вписанного шара, S — площадь полной поверхности многогранника.

Доказательство. Соединим центр вписанного шара со всеми вершинами многогранника. Многогранник окажется разделённым на несколько пирамид. Основанием каждой пирамиды является соответствующая грань многогранника, а вершиной — центр шара. Объём каждой такой пирамиды равен $\frac{1}{3}rS_k$, где S_k — площадь соответствующей грани. Сложив объёмы этих пирамид, получим объём многогранника. При этом сумма S_k равна S — площади полной поверхности многогранника.▼

Замечание. Формула (5) верна для любого тетраэдра, поскольку в любой тетраэдр можно вписать шар.

В двух следующих теоремах содержатся формулы для вычисления объёма тетраэдра.

Теорема 5.7 (*вычисление объёма тетраэдра через площади двух граней, двугранный угол и ребро*)

Пусть P и Q — площади двух граней тетраэдра, a — длина их общего ребра, α — величина двугранного угла между этими гранями. Тогда объём тетраэдра может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{2PQ\sin\alpha}{3a}. \qquad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором площади граней ABC и BCD равны P и Q, α — угол между этими гранями, $BC = a$ (рис. 97). Пусть d — высота к стороне BC в треугольнике BCD, $d = \frac{2Q}{a}$. Тогда для высоты тетраэдра, опущенной из вершины D, имеет место равенство

$$h = d\sin\alpha = \frac{2Q}{a}\sin\alpha.$$

Значит,

$$V = \frac{1}{3}Ph = \frac{2PQ\sin\alpha}{3a}. ▼$$

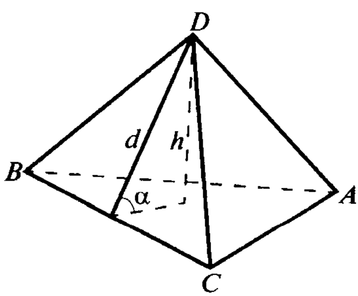


Рис. 97

Теорема 5.8 (*вычисление объёма тетраэдра через два противоположных ребра, расстояние и угол между ними*)

Пусть a и b — длины двух противоположных рёбер тетраэдра, d — расстояние между прямыми, содержащими эти

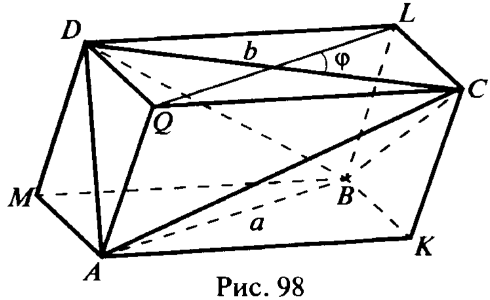


Рис. 98

рёбра, φ — угол между ними. Тогда объём тетраэдра может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{6} abd \sin\varphi. \qquad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$; пусть AB и CD — рёбра, о которых говорится в условии теоремы. Достроим тетраэдр до параллелепипеда $AKBMQCLD$ (рис. 98), проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру (этот приём был рассмотрен в главе 4). Площади граней $AKBM$ и $LCQD$ равны $\frac{1}{2}ab\sin\varphi$, расстояние между ними d. Значит, объём параллелепипеда равен $\frac{1}{2}abd\sin\varphi$. Отрезая от параллелепипеда четыре треугольные пирамиды ($ABCK$ и т. д.), получим рассматриваемый тетраэдр $ABCD$. Объём каждой из отрезанных пирамид составляет $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда. Значит, объём V тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{1}{3}$ объёма параллелепипеда $AKBMQCLD$, т. е. $V = \frac{1}{6}abd\sin\alpha$.▼

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а площади боковых граней равны S, P и Q. Найдите объём пирамиды.

2 (в). Два отрезка, длины которых равны a и b, расположены на перпендикулярных скрещивающихся прямых. Расстояние между прямыми равно d. Найдите объём тетраэдра с вершинами в концах данных отрезков.

3. Найдите объём пирамиды $ABCD$, в которой $AB = 4$, $BC = 5$, $AD = 6$, $BD = 7$, $CA = 8$, а двугранный угол с ребром AB равен $60°$.

4. Пять рёбер пирамиды равны 1. Вершины пирамиды расположены на поверхности сферы радиусом 1. Найдите объём этой пирамиды.

5 (вп). Объём пирамиды $ABCD$ равен V. На рёбрах DA, DB и DC взяты точки K, L и M так, что $DK = \frac{1}{3}DA$, $DL = \frac{2}{5}DB$, $DM = \frac{3}{4}DC$, P — середина AB, G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите объёмы следующих пирамид: $KLMC$, $KLMP$, $KLMG$, $DLMG$, $BMPG$.

6 (в). Объём пирамиды $ABCD$ равен 1. На рёбрах AD, BD и CD взяты точки K, L и M так, что $2AK = KD$, $BL = 2LD$, $2CM = 3MD$. Найдите объём многогранника $ABCKLM$.

7 (в). Объём треугольной пирамиды равен 1. Найдите объём пирамиды с вершинами в точках пересечения медиан граней этой пирамиды.

8. Ребро CD пирамиды $ABCD$ равно 1 и перпендикулярно плоскости ABC, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 90°$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

9. На диагонали грани единичного куба взяты точки M и N, а на скрещивающейся с нею диагонали соседней грани взяты точки P и Q. Известно, что $MN = \frac{1}{2}$, $PQ = \frac{1}{3}$. Найдите объём тетраэдра $MNPQ$.

10. Объём тетраэдра $ABCD$ равен V. На ребре AB взяты точки M и N, а на ребре CD — точки P и Q. Известно, что $MN = \alpha AB$, $PQ = \beta CD$. Найдите объём тетраэдра $MNPQ$.

11. Объём тетраэдра $ABCD$ равен V. На рёбрах CD, DB и BA взяты точки K, L и M так, что $2CK = CD$, $3DL = DB$, $5BM = 2AB$. Найдите объём тетраэдра $KLMD$.

12 (т). На рёбрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ объёмом V взяты соответственно точки K, L, M и N так, что $2AK = AB$, $3BL = BC$, $4CM = CD$, $5DN = DA$. Найдите объёмы тетраэдров $NKLB$, $NMLB$, $KNMB$, $KLMB$ и $KLMN$.

13. Высота цилиндра равна h. В каждое основание вписан правильный треугольник, причём один из этих треугольников повёрнут относительно другого на угол 60°. Сторона каждого треугольника равна a. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины этих треугольников.

14 (т). Площадь боковой поверхности треугольной пирамиды равна 6, двугранные углы при основании равны 60°. Радиус вписанного шара равен r. Найдите объём пирамиды. В каких пределах может меняться r?

15 (п). Пусть $ABCD$ — прямоугольник, $AB = a$, $AC = b$. Прямая MN параллельна AB, $MN = c$, расстояние от MN до плоскости $ABCD$ равно h. Найдите объём многогранника $ABCDMN$.

16. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник со стороной a. Отрезок MN параллелен одной из сторон шестиугольника, равен его стороне и расположен на расстоянии h от его плоскости. Найдите объём тела $ABCDEFMN$.

17 (т). На рёбрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ объёмом 1 взяты соответственно точки K, L, M и N так, что $AK = \frac{1}{3}AB$, $BL = \frac{1}{4}BC$, $CM = \frac{1}{5}CD$, $DN = \frac{1}{6}DA$. Найдите объём тетраэдра $KLMN$.

5.7*. Использование свойств объёма при решении задач

Свойства объёмов, формулы для вычисления объёмов могут оказаться полезными при решении различных задач, даже таких, в условии которых об объёме не упоминается. В частности, формула (5) удобна для нахождения радиуса вписанного в многогранник шара (если он существует); используя формулу (6), можно находить двугранные углы тетраэдра; формула (7) может быть использована для определения угла или расстояния между скрещивающимися прямыми. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD, в котором AB = a, AD = b, SC — высота пирамиды, SC = h. Чему равен двугранный угол между плоскостями ABS и ADS?*

Решение. Рассмотрим пирамиду $ABDS$ (рис. 99). Её объём равен $\frac{1}{6}abh$. Площади граней ABS и ADS соответственно равны

$$\frac{1}{2}a\sqrt{b^2+h^2} \text{ и } \frac{1}{2}b\sqrt{a^2+h^2}.$$

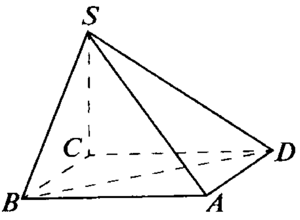


Рис. 99

Кроме того, $AS = \sqrt{a^2+b^2+h^2}$.

На основании формулы (7) имеем:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{b^2+h^2} \cdot \frac{1}{2}b(\sqrt{a^2+h^2} \cdot \sin\varphi)}{3\sqrt{a^2+b^2+h^2}} = \frac{1}{6}abh,$$

где φ — искомый двугранный угол.

Таким образом,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2+h^2} \cdot h}{\sqrt{a^2+h^2} \cdot \sqrt{b^2+h^2}}.$$

Кроме того, угол φ является тупым, поскольку проекция точки B на плоскость ADS лежит вне треугольника ADS. (Она находится на перпендикуляре к AD, проведённом в этой плоскости и проходящем через A.) Значит,

$$\varphi = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{a^2+b^2+h^2} \cdot h}{\sqrt{a^2+h^2} \cdot \sqrt{b^2+h^2}}. \blacktriangledown$$

В курсе планиметрии при изучении темы площади был рассмотрен приём, состоявший в замене отношения отрезков отношением соответствующих площадей. В пространстве мы имеем возможность заменить отношение отрезков отношением объёмов. Например, если точки M и N расположены по разные стороны от плоскости треугольника ABC, то отношение, в котором плоскость ABC делит отрезок MN, равно отношению объёмов пирамид $ABCM$ и $ABCN$ (рис. 100). Вместо треугольника можно взять любой многоугольник.

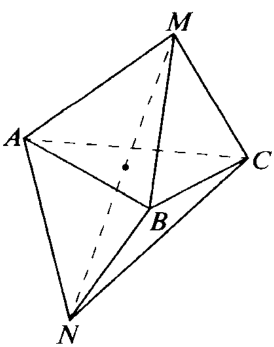


Рис. 100

5.7

Задача 2. *На рёбрах AB, BD и DC пирамиды ABCD взяты точки M, L и K так, что* $AM = \frac{1}{3}AB$, $BL = \frac{1}{4}BD$, $DK = \frac{2}{5}DC$. *В каком отношении плоскость KLM делит отрезок, соединяющий середины рёбер AD и BC?*

Решение. Пусть P и Q — середины AD и BC (рис. 101). Идея решения состоит в том, чтобы определить, какую часть объёма пирамиды $ABCD$ составляют пирамиды $MPLK$ и $KLQM$, а затем найти отношение их объёмов.

Пусть площадь треугольника ABD равна S. Тогда площадь треугольника DPL равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}S = \frac{3}{8}S$. Площадь треугольника BML равна $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}S = \frac{1}{6}S$. Такой же будет и площадь треугольника $AMP \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S\right)$. Таким образом, площадь треугольника PML равна

$$\left(1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)S = \frac{7}{24}S.$$

А поскольку расстояние от K до плоскости ABD составляет $\frac{2}{5}$ расстояния от C до этой же плоскости, объём пирамиды $PMLK$ равен

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{24}V = \frac{7}{60}V,$$

где V — объём пирамиды $ABCD$.

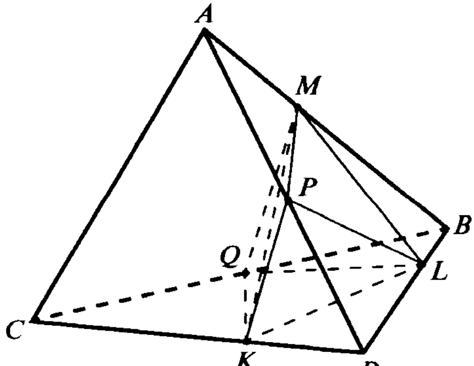


Рис. 101

Объём пирамиды $KLQM$ находится так же. Он равен

$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\right)V=\frac{11}{60}V.$$

Искомое отношение равно $\frac{7}{60}:\frac{11}{60}=\frac{7}{11}$.▼

<u>Задача 3.</u> *В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах SA, SB и SC взяты соответственно точки K, L и M так, что $SK=\frac{1}{2}SA$, $SL=\frac{1}{3}SB$, $SM=\frac{3}{5}SC$. Пусть плоскость KLM пересекает SD в точке P. Найти отношение $SP:SD$.*

Решение. Утверждение, что точки K, L, M и P лежат в одной плоскости (рис. 102), эквивалентно равенству

$$V_{SKLM}+V_{SKPM}=V_{SPKL}+V_{SPML}. \qquad (*)$$

Положим $SP=xSD$, а объём данной пирамиды равным $2V$. Тогда объём пирамиды $SABC$ равен V. По теореме 5.4 имеем

$$\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}}=\frac{SK}{SA}\cdot\frac{SL}{SB}\cdot\frac{SM}{SC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}.$$

Значит, $V_{SKLM}=\frac{1}{10}V$. Аналогично найдём: $V_{SKPM}=\frac{3x}{10}V$, $V_{SPML}=\frac{x}{5}V$, $V_{SPKL}=\frac{x}{6}V$. Подставляя найденные выражения

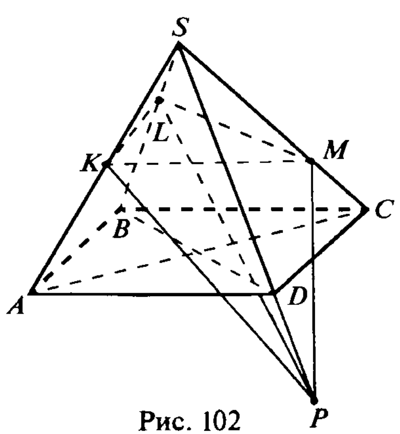


Рис. 102

в соотношение (*), получаем $\frac{1}{10} + \frac{3x}{10} = \frac{x}{5} + \frac{x}{6}$. Откуда найдём $x = \frac{3}{2}$, т. е. точка P лежит на продолжении ребра SD и $SP : SD = 3 : 2$.▼

Задачи, задания, вопросы

1 **(п).** Площади граней ABC и ADC тетраэдра $ABCD$ равны P и Q. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла с ребром AC делит ребро BD в отношении $P : Q$.

2 **(п).** Площади граней ABC и ADC тетраэдра $ABCD$ равны P и Q, двугранный угол между ними равен α. Найдите площадь треугольника, по которому биссекторная плоскость указанного угла пересекает заданный тетраэдр.

3. В основании пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной 4. Высота пирамиды равна 2, а её основание совпадает с серединой AC. Найдите величину двугранного угла между гранями ABD и BCD.

4. В основании пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC, DC — высота пирамиды, $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$. Найдите величину двугранного угла между плоскостями ADB и ADC.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC = 2AD$. На рёбрах SA и SB взяты точки K и L так, что $2SK = KA$, $3SL = LB$. В каком отношении плоскость KLC делит ребро SD?

6 **(т).** Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а площади боковых граней равны S, Q и P. Найдите радиус вписанного шара. Найдите также радиус шара, касающегося основания и продолжений боковых граней пирамиды.

7 (т). На рёбрах DA, DB и DC пирамиды $ABCD$ взяты соответственно точки K, L и M так, что $DK = \frac{1}{2}DA$, $DL = \frac{2}{5}DB$, $DM = \frac{3}{4}DC$, G — точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость KLM делит отрезок DG?

8. На рёбрах AB и CD тетраэдра $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AK = \frac{1}{3}AB$, $CM = \frac{3}{5}CD$. В каком отношении плоскость, проходящая через BC и середину AD, делит отрезок KM?

9 (т). Плоскость пересекает рёбра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M и P. Известно, что K — середина AB, $BL = \frac{1}{3}BC$, $CM = \frac{3}{4}CD$. Найдите отношение, в котором KM делит отрезок LP.

10 (т). В основании пирамиды лежит прямоугольник. Все боковые рёбра равны. Плоскость пересекает боковые рёбра пирамиды, отсекая на них отрезки a, b, c и d (в порядке обхода и считая от общей вершины). Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

11 (т). Диагонали четырёхугольника $ABCD$, лежащего в основании пирамиды $SABCD$, пересекаются в точке M. Площади треугольников ABM, BCM и CDM равны соответственно 1, 2 и 6. Плоскость, проходящая через A, пересекает SB и SC в точках K и M таких, что $SK = \frac{1}{2}KB$, $SM = \frac{1}{3}MC$. Пусть эта плоскость пересекает прямую SD в точке P. Найдите $SP : SD$.

12 (т). Радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен R. Известно также, что разность площадей треугольников ABC и ABD в k раз больше площади треугольника ABK, где K — середина ребра CD. Найдите радиус круга, по которому плоскость ABK пересекает вписанный в этот тетраэдр шар.

6

Объёмы и поверхности круглых тел

6.1. Объём цилиндра и конуса

Рассмотрим цилиндр с радиусом основания R и высотой h. Впишем в него правильную n-угольную призму (рис. 103). С возрастанием n объём этой призмы будет стремиться к объёму цилиндра. Но объём любой призмы определяется формулой:

$$V = S_{осн}h,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания призмы. С возрастанием n площадь основания призмы стремится к площади основания цилиндра. Отсюда следует, что для объёма цилиндра также верна указанная формула. Выражая площадь основания через R, получаем, что **объём цилиндра** определяется формулой

$$V = \pi R^2 h. \qquad (8)$$

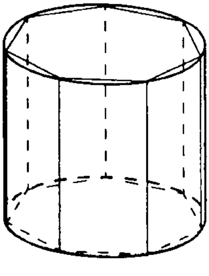


Рис. 103

Точно так же, рассматривая пирамиды, основания которых — правильные многоугольники, вписанные в основание данного конуса, придём к выводу, что формула, выражающая объём пирамиды, верна и для конуса. Таким образом, **объём конуса** может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \qquad (9)$$

где R — радиус основания конуса, h — его высота.

Объём любого цилиндра находят по следующей формуле

$$V = S_{\text{осн}} h,$$

а **объём любого конуса** можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$

6.2. Принцип Кавальери и объём шара

Принцип подобия, с помощью которого была получена формула для объёма пирамиды, может быть выведен из другого, более общего принципа — принципа Кавальери. Б. Кавальери (1598—1647) — итальянский учёный, ученик Галилея. Основное сочинение Кавальери «Геометрия» издано в 1635 г. Именно там было сформулировано утверждение, получившее впоследствии название «принцип Кавальери». Бонавентура Кавальери был одним из тех учёных, кого принято называть «предтечами математического анализа» — того раздела математики, который был создан в XVII в. И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем и который на долгие годы вперёд (до конца XIX в.) определил развитие математики, физики и многих других наук.

Один из центральных вопросов, ответ на которые даёт математический анализ, это вопрос об определении площади криволинейной фигуры или объёма тела сложной формы. Эти вопросы волновали учёных с глубокой древности: одним из выдающихся достижений Архимеда являлось как раз нахождение объёма шара (правда, его метод достаточно труден для воспроизведения, поэтому мы его не приводим). Занимались этим и Кеплер, и Ферма, и Галилей. На языке современного математического анализа все эти задачи сводятся к отысканию определённого интеграла некоторой функции. Но строгое определение интеграла — дело весьма трудоёмкое и выходящее далеко за рамки нашего учебника. Поэтому мы выведем формулу для объёма шара, основываясь на предложенном Кавальери принципе (или методе) неделимых, который теперь называют по имени создателя. В некотором смысле, этот принцип эквивалентен созданному позднее интегральному исчислению, но он гораздо более нагляден и понятен интуитивно.

Приведём одну из возможных формулировок этого принципа.

Принцип Кавальери

Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной плоскости, пересекает эти два тела по фигурам, имеющим одинаковую площадь, то эти тела имеют равные объёмы.

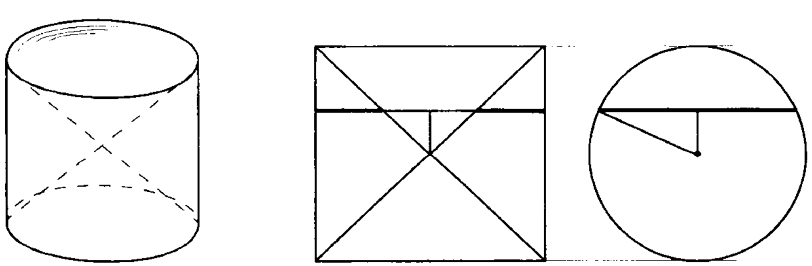
Покажем, как с помощью принципа Кавальери можно получить формулу , выражающую объём шара.

Теорема 6.1 (*формула объёма шара*)

Для объёма шара радиусом R имеет место формула

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим цилиндр, осевым сечением которого является квадрат со стороной $2R$, и удалим из него два конуса с общей вершиной в центре цилиндра и основаниями, совпадающими с основаниями цилиндра (рис. 104, *а*). Докажем, что получившееся тело имеет тот же объём, что и шар радиусом R. Возьмём такой шар и расположим его так, что он касается плоскостей, содержащих основания цилиндра (на рис. 104, *б* изображено осевое сечение рассматриваемого тела и сечение шара той же плоскостью; горизонтальная прямая — это «след» плоскости, параллельной основаниям цилиндра, пересекающей оба наши тела). Рассмотрим плоскость, параллельную основаниям цилиндра и удалённую на расстояние x от центров шара и цилиндра. Эта плоскость пересечёт шар по окружности радиусом



а) *б*)

Рис. 104

$\rho = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь сечения $\pi\rho^2 = \pi(R^2 - x^2)$. Сечением плоскостью построенного тела будет кольцо с внешним радиусом R и внутренним радиусом x. Площадь кольца равна разности площадей кругов с радиусами R и x:

$$\pi R^2 - \pi x^2 = \pi\rho^2.$$

Итак, площади сечений этих тел равны. Теперь, в соответствии с принципом Кавальери, находим, что объём шара радиусом R равен разности объёмов указанных цилиндра и двух конусов:

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Формула (10) доказана.▼

Замечание. Сформулированный в этом параграфе принцип Кавальери может быть несколько усилен: **если два тела можно расположить в пространстве так, что любая плоскость, параллельная заданной, пересекает эти тела по фигурам, отношение площадей которых постоянно, то таким же будет и отношение объёмов этих тел.**

Покажем, как с помощью принципа Кавальери можно получить формулу объёма пирамиды.

Заметим, что из принципа Кавальери и теоремы 2.6 (свойство параллельных сечений пирамиды) следует справедливость утверждения: **две пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями имеют равные объёмы**.

Рассмотрим теперь треугольную пирамиду $ABCD$. Достроим её до треугольной призмы $ABCKMD$ (рис. 105). Из последнего утверждения следует, что пирамиды $ABCD$, $ABKD$, $BMKD$ имеют равные объёмы. То, что объёмы пирамид $ABCD$ и $ABKD$ равны, нетрудно понять, если в качестве их оснований рассмотреть треугольники ACD и AKD. Аналогично, взяв в качестве оснований треугольники ABK и BMK, докажем равенство объёмов пирамид $ABKD$ и $BMKD$. Итак, объём пирамиды $ABCD$ составляет $\frac{1}{3}$ объёма призмы $ABCKMD$.

Таким образом, мы ещё раз получили формулу объёма пирамиды (формула (4)).

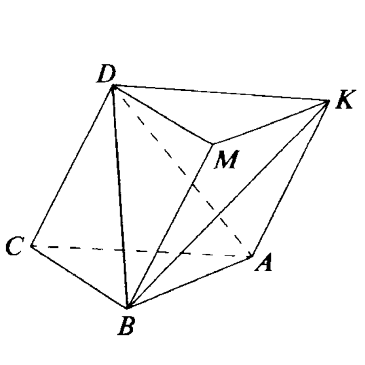


Рис. 105

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Имеется отрезок длиной l. Найдите объём тела, состоящего из всевозможных точек пространства, удалённых от какой-либо точки отрезка на расстояние, которое не превышает d.

2. Найдите объём тела, получающегося при вращении ромба со стороной 1 и острым углом α вокруг меньшей диагонали.

3. Найдите объём тела, получающегося при вращении трапеции, основания которой равны 3 и 2, а высота равна 1, вокруг большего основания.

4. Найдите сумму объёмов двух тел, получающихся при вращении прямоугольника со сторонами a и b вокруг двух неравных сторон.

5. Найдите радиус шара, если его объём равен объёму цилиндра, осевым сечением которого является квадрат со стороной a.

6 (в). Найдите объём части пространства, заполняемой всевозможными шарами радиусом r, центры которых расположены внутри или на границе квадрата со стороной a.

7. Найдите объём части пространства, которая состоит из точек, удалённых на расстояние, не превышающее d, от какой-нибудь точки внутри или на границе куба с ребром a.

8. Имеется выпуклый многоугольник с периметром $2P$ и площадью S. Рассмотрим всевозможные шары радиусом r с центрами внутри или на границе этого многоугольника. Докажите, что объём части пространства, заполняемой этими шарами, может быть найден по формуле

$$V = 2Sr + \pi P r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Докажите, что указанная формула остаётся верной, если вместо многоугольника взять любую выпуклую плоскую фигуру площадью S, ограниченную линией длиной $2P$.

* При решении задач 9—15 надо воспользоваться принципом Кавальери.

9. Докажите, что объём тела, которое получается в результате вращения правильного треугольника вокруг прямой, параллельной его плоскости и такой, что её проекция на плоскость треугольника содержит его высоту, равна объёму конуса с осевым сечением, имеющим вид этого треугольника.

10. Дан равнобедренный треугольник с высотой h и стороной основания a. Найдите объём тела, получающегося при вращении этого треугольника вокруг прямой, образующей угол α с плоскостью, содержащей треугольник, если проекция этой прямой на плоскость треугольника содержит его высоту, опущенную на основание.

11. Основания цилиндра, высота которого равна h, расположены на поверхности сферы. Найдите объём части шара, ограниченной сферой и боковой поверхностью цилиндра.

12 (т). Оси двух цилиндров радиусом r пересекаются и перпендикулярны. Найдите объём общей части цилиндров. (Цилиндры достаточно длинные.)

13. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, отрезок DE перпендикулярен его плоскости. Докажите, что объём тела, получающегося при вращении тетраэдра $ABCE$ вокруг AB, равен сумме объёмов двух тел: цилиндра с осью AB и образующей CD и конуса с осью CD и образующей CE.

14 (т). Найдите объём тела, получающегося при вращении единичного куба вокруг его диагонали.

15 (т). Рассмотрим тело, получающееся в результате вращения круга радиусом r вокруг прямой, принадлежащей плоскости круга и удалённой от его центра на расстояние R ($R > r$). Такое тело называется *тором*. Докажите, что объём этого тела равен объёму цилиндра, в основании которого лежит круг радиусом r, а высота равна $2\pi R$.

6.3. Площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы

Мы знаем, что если боковую поверхность цилиндра разрезать по образующей, то её можно будет развернуть на плоскость. Развёрткой является прямоугольник со сторонами H и L, где H — высота цилиндра, L — длина окружности основания, т. е. $L = 2\pi R$, где R — радиус окружности основания. Из этого следует, что **площадь боковой поверхности цилиндра** выражается формулой

$$S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH. \qquad (11)$$

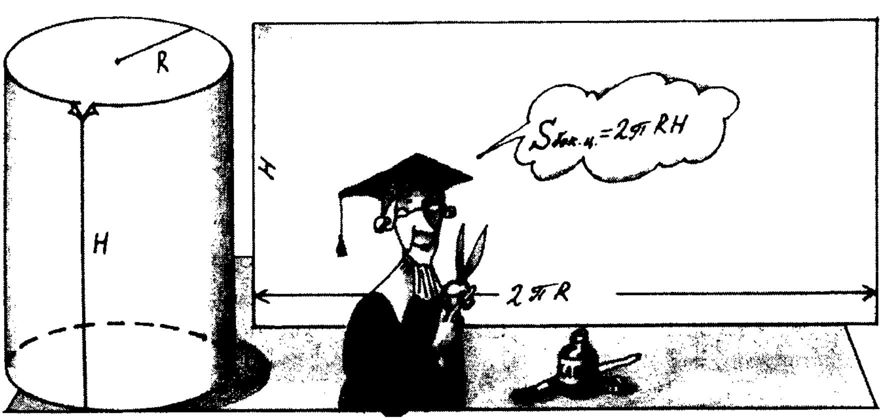
Аналогично получается формула площади боковой поверхности конуса. Развёрткой боковой поверхности конуса, если её разрезать по образующей, является круговой сектор радиусом l, где l — длина образующей конуса. Длина круговой границы этого сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. $2\pi R$, где R — радиус основания конуса. Таким образом, из этого следует (вспомните выражение площади кругового сектора через длину дуги и радиус), что **площадь боковой поверхности конуса** выражается формулой

$$S_{\text{бок. к}} = \pi Rl. \qquad (12)$$

Исходя из формулы объёма шара, можно получить формулы площади поверхности шара — сферы. Это можно сделать, например, следующим образом. Рассмотрим произвольный многогранник, описанный около сферы, имеющей радиус R. Тогда (см. формулу (5)) **объём многогранника** выражается формулой

$$V_{\text{м}} = \frac{1}{3} RS_{\text{м}},$$

где $S_{\text{м}}$ — площадь поверхности многогранника.



Увеличивая число граней многогранника так, что площадь каждой грани неограниченно уменьшается (стремится к нулю), получим, что формула (5) остаётся верной для шара, и **объём шара** выражается формулой

$$V_{ш} = \frac{1}{3} RS_{сф}, \qquad \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3} RS_{сф}.$$

Таким образом, **площадь сферы** выражается формулой

$$S_{сф} = 4\pi R^2. \qquad (13)$$

Замечание. В § 6.5 мы выведем формулу площади сферы другим способом.

Задачи, задания, вопросы

1. Сечением цилиндра является квадрат. Основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а его вершина — с центром другого. Найдите отношение боковых поверхностей конуса и цилиндра.
2. Из цилиндра с высотой h и радиусом основания R удалили два конуса. Вершина каждого совпадает с центром цилиндра, а основания — с основаниями цилиндра. Найдите площадь полной поверхности получившегося тела.
3. Рассмотрим два тела, получающихся в результате вращения ромба со стороной 1 и острым углом α вокруг меньшей и большей диагоналей. Найдите площадь полной поверхности каждого из них. У какого тела полная поверхность больше?

4 (в). Имеются шар и куб равного объёма. У какого тела больше полная поверхность?

5 (в). Пусть S — площадь основания конуса, $S_{бок.\,к}$ — площадь его боковой поверхности, α — угол между образующей конуса и его основанием. Докажите, что

$$S = S_{бок.\,к} \cos \alpha.$$

6. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 4, $\angle BAC = 30°$, K — середина BC. Найдите объём и полную поверхность тела, получающегося при вращении треугольника BAK вокруг AC.

7 **(т).** Через центр правильного треугольника со стороной a проходит прямая, параллельная одной из его сторон. Найдите объём и полную поверхность тела, получающегося при вращении треугольника вокруг этой прямой.

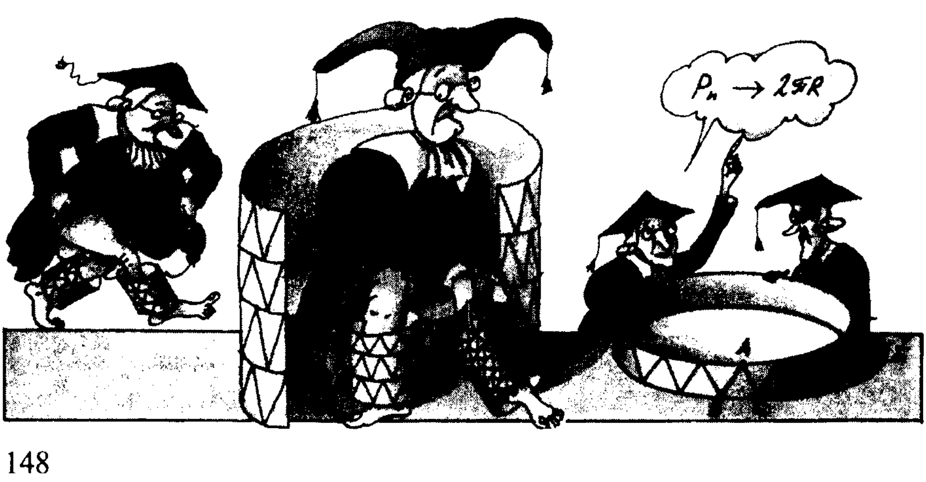
8 **(п).** Центр шара радиусом R лежит на ребре двугранного угла величиной α. Найдите объём части шара и площадь части сферы, находящихся внутри этого угла.

6.4*. Сапог Шварца, или Что такое площадь поверхности?

В предыдущем параграфе получены формулы, по которым можно вычислять площади поверхности известных нам круглых тел. При этом вопрос, что такое площадь поверхности тела, не являющегося многогранником, не обсуждался.

Длину кривой можно получить следующим образом. Отметим на ней несколько точек и соединим их последовательно отрезками. Получим ломаную, в каком-то смысле вписанную в эту кривую. Будем увеличивать число звеньев этой ломаной так, чтобы длина наибольшего звена стремилась к нулю. Тогда длина ломаной с возрастанием числа её сторон будет приближаться к длине кривой. Примерно так определяют математики длину кривой.

А можно ли, «вписывая» подобным образом в рассматриваемую поверхность многогранную поверхность и увеличивая число её граней, утверждать, что площадь многогранной поверхности



будет обязательно приближаться к площади рассматриваемой поверхности? Оказывается, в этом случае всё не так просто. Даже рассматривая простейшие круглые поверхности, в результате таких процедур можно получить странные и очевидно неправильные результаты.

В качестве примера рассмотрим конструкцию, которую называют **сапог Шварца** (или **гармошка Шварца**). Пример этот придумал известный немецкий математик XIX—XX вв. Г. А. Шварц.

Рассмотрим цилиндр радиусом R и высотой, равной 1 (рис. 106, *а*). Впишем в нижнее основание правильный n-угольник. Затем разделим высоту на m равных частей и через точки деления проведём сечения, параллельные его основаниям. Занумеруем все сечения, начиная с нижнего основания. В каждое сечение впишем такие же n-угольники, только в сечениях с нечётными номерами возьмём стороны этих n-угольников параллельными соответствующим сторонам нижнего n-угольника, а в чётных сечениях повернём их на угол $\frac{180°}{n}$; затем вершины каждого n-угольника соединим с ближайшими вершинами соседних n-угольников. В результате получим многогранную, состоящую из треугольников (если не учитывать верхний и нижний n-угольники) поверхность, вписанную в цилиндр.

На рисунке 106, *б* изображён один слой этой поверхности. Он состоит из $2n$ равнобедренных треугольников. Их основаниями являются стороны двух правильных n-угольников, вписанных в основания цилиндра с высотой $\frac{1}{m}$. Зафиксируем число n. Высота каждого треугольника, проведённая к основанию, больше некоторой величины (зависящей от n). Эту величину можно опреде-

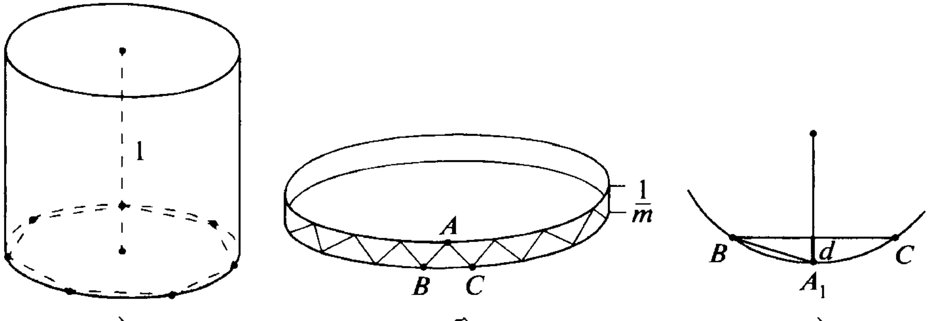


Рис. 106

лить следующим образом. Возьмём любой треугольник ABC. Пусть BC — его основание (см. рис. 106, *б*), BC — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R. Спроектируем вершину A на плоскость, содержащую сторону BC. Получим точку A_1, являющуюся серединой дуги BC (рис. 106, *в*). Понятно, что высота к стороне BC в треугольнике ABC не меньше расстояния от A_1 до BC. Обозначим это расстояние через d (правильнее было бы обозначить его через d_n, показывая тем самым его зависимость от n). Возьмём любое число $k > 1$ и выберем m так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{k}{m} < d$. Высота в каждом треугольнике больше $\frac{k}{m}$. Если P_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, то сумма площадей треугольников одного слоя будет больше $P_n\frac{k}{m}$. Следовательно, площадь рассматриваемой поверхности, вписанной в цилиндр (вернее, её части, вписанной в боковую поверхность), будет больше, чем $m \cdot P_n\frac{k}{m} = kP_n$. Но с ростом n величина P_n приближается к длине окружности, т. е. к $2\pi R$. Значит, площадь многогранной поверхности, вписанной в боковую поверхность цилиндра, с ростом n, начиная с какого-то момента, станет больше, чем $k(2\pi R)$, где k — любое число, большее 1. А мы знаем, что площадь боковой поверхности цилиндра радиусом R и высотой 1 равна $2\pi R$. Полученное противоречие доказывает, что подобным образом площадь поверхности цилиндра и вообще любых круглых тел определять нельзя. При этом даже не важно, что известно, чему равна площадь боковой поверхности цилиндра. Ведь наши «рассуждения» приводят к тому, что площадь боковой поверхности цилиндра сколь угодно велика. И чтобы понять абсурдность этого, нет необходимости знать, чему равна площадь боковой поверхности цилиндра.

Приведённый пример показывает, что площадь поверхности — достаточно сложное понятие. Определить, что такое площадь поверхности, не так просто, ведь даже вполне разумные на первый взгляд определения могут привести к парадоксам. Попытаемся коротко объяснить, почему площадь поверхности в рассмотренном примере с ростом числа граней не приближается к площади боковой поверхности цилиндра. Дело в том, что плоскость каждого из треугольников, образующих многогранную поверхность, не приближается к плоскости, касающейся боковой поверхности цилиндра.

Если мы в одной из вершин треугольника проведём плоскость, касательную к поверхности цилиндра, то угол между этой плоскостью и плоскостью самого треугольника остаётся больше некоторой величины.

В этом учебнике задача определения площади поверхности в общем виде не рассматривается, мы ограничиваемся рассмотрением конкретных поверхностей: боковой поверхности цилиндра, конуса, а также сферы и её частей.

6.5. Площадь поверхности сферического пояса

Сферическим поясом будем называть часть сферы, заключённую между двумя параллельными плоскостями, пересекающими сферу. Расстояние между этими плоскостями называют **высотой** сферического пояса. Если одна из этих плоскостей касается сферы, то получаем **сферический сегмент**.

Цель этого параграфа — вывести формулу площади поверхности сферического пояса. Но сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

1. Площадь части боковой поверхности правильной пирамиды, заключённой между двумя пересекающими её плоскостями, параллельными основанию, может быть найдена по формуле

$$S = (p_1 + p_2)\, d, \qquad (14)$$

где p_1 и p_2 — полупериметры многоугольников, по которым указанные плоскости пересекают нашу пирамиду, d — расстояние между сторонами этих многоугольников, лежащих в одной боковой грани пирамиды.

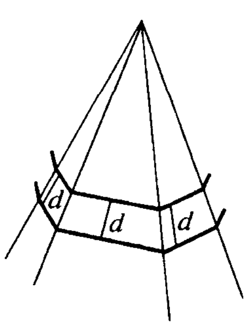
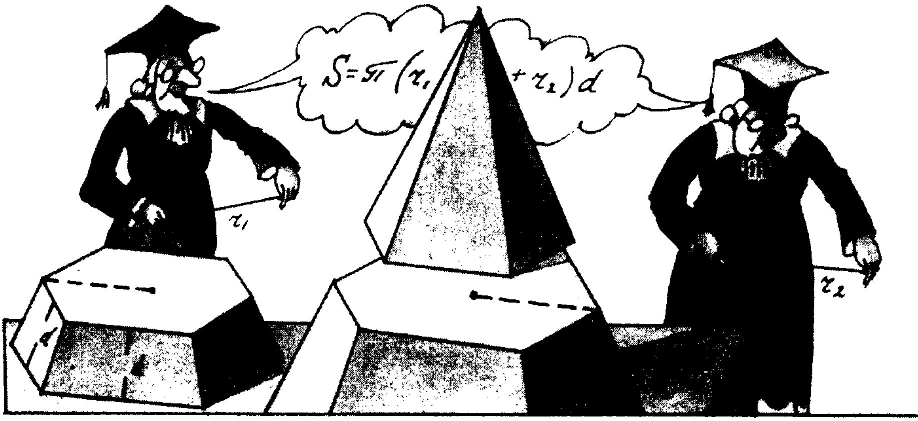


Рис. 107

Доказательство. Справедливость формулы (14) следует из соответствующей формулы площади трапеции, поскольку указанная часть боковой поверхности состоит из равных трапеций (рис. 107). ▼

6.5



2. Площадь части боковой поверхности конуса, заключённой между двумя пересекающими её плоскостями, параллельными основанию, может быть найдена по формуле

$$S = \pi(r_1 + r_2)d, \tag{15}$$

где r_1 и r_2 — радиусы сечений, d — длина части образующей, заключённой между плоскостями.

Доказательство. Формула (15) получается из формулы (14) предельным переходом. Именно так мы из формулы объёма пирамиды получили формулу объёма конуса.

Рассмотрим правильную n-угольную пирамиду, основание которой описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Для площади части боковой поверхности этой пирамиды, заключённой между плоскостями, верна формула (14). С возрастанием n полупериметры этих n-угольников приближаются к πr_1 и πr_2.▼

Теорема 6.2 (*формула для вычисления площади части конической поверхности*)

Рассмотрим расположенные в одной плоскости отрезок *AB* и прямую *m*, не перпендикулярную этому отрезку и не пересекающую его. Пусть *h* — длина проекции *AB* на прямую *m*, *L* — длина отрезка серединного перпендикуляра к *AB*, заключённого между *AB* и *m*. Тогда площадь поверхности, полученной в результате вращения *AB* вокруг прямой *m*, может быть найдена по формуле

$$S = 2\pi L h. \tag{16}$$

Доказательство. Получающаяся поверхность представляет собой часть боковой поверхности конуса, которая была рассмотрена в утверждении 2 (формула (15)).

Пусть A_1 и B_1 — проекции A и B на m, N — середина AB, MN — отрезок серединного перпендикуляра к AB, точка M расположена на прямой m; N_1 — проекция N на m; B_2 — проекция A на BB_1 (рис. 108). По условию $A_1B_1 = AB_2 = h$, $MN = L$, NN_1 — средняя линия трапеции AA_1B_1B, $AA_1 + BB_1 = 2NN_1$. По формуле (15) имеем

$$S = \pi(AA_1 + BB_1) \cdot AB = 2\pi NN_1 \cdot AB.$$

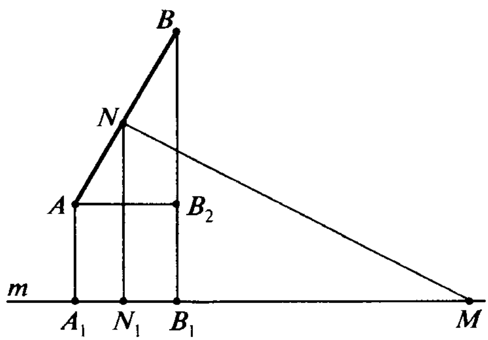


Рис. 108

Из подобия треугольников BAB_2 и MNN_1 получим $\frac{NN_1}{AB_2} = \frac{NM}{AB}$, откуда $NN_1 \cdot AB = AB_2 \cdot NM$. Таким образом,

$$S = 2\pi AB_2 \cdot NM = 2\pi Lh,$$

что и требовалось доказать. ▼

Сформулируем и докажем теорему о площади сферического пояса.

Теорема 6.3 (*формула площади сферического пояса*)

Площадь поверхности сферического пояса может быть найдена по формуле

$$\boldsymbol{S = 2\pi Rh,} \tag{17}$$

где R — радиус сферы, h — высота сферического пояса.

Доказательство. Возьмём в данной сфере диаметр PQ, перпендикулярный плоскостям, которые ограничивают сферический пояс, и рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через PQ. Сечением сферического пояса будут две дуги,

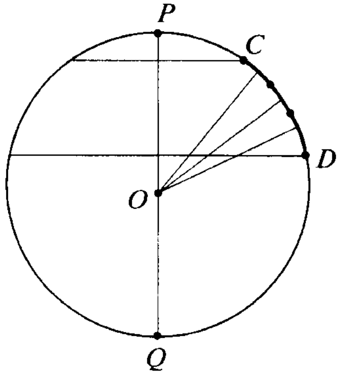


Рис. 109

симметричные относительно PQ. Длина проекции каждой из этих дуг на PQ равна h. Сам сферический пояс образуется в результате вращения любой из этих дуг вокруг прямой PQ. Пусть это дуга CD (рис. 109).

Разобьём дугу CD на n равных частей и соединим последовательно точки деления. Получим равнозвенную ломаную, вписанную в эту дугу. Обозначим через O середину PQ (центр сферы); L_n — расстояние от O до звеньев ломаной. (Так как звенья ломаной равны, то они равноудалены от центра сферы — точки O. Кроме того, все серединные перпендикуляры к звеньям ломаной проходят через O.) При вращении ломаной вокруг PQ получим поверхность, составленную из частей конических поверхностей. Каждая часть этой поверхности соответствует одному звену ломаной. Применяя к каждой части поверхности формулу (16) и складывая найденные значения, получим, что для площади поверхности, образовавшейся в результате вращения ломаной, справедлива формула

$$S_n = 2\pi L_n h.$$

С возрастанием n величина L_n возрастает и стремится к R. Примем за площадь поверхности сферического пояса величину, к которой стремится S_n. В результате получаем формулу (17).▼

Замечание. Почему мы можем быть уверены, что доказанная формула (17) верна и даёт правильное значение величины поверхности сферического пояса? Чем построенная при её выводе поверхность отличается от многогранной поверхности, рассмотренной в предыдущем параграфе, давшей неверный результат? Дело в том, что с ростом числа звеньев ломаной, вписанной в дугу окружности, касательные плоскости к поверхности, возникающей в результате вращения этой ломаной, приближаются к касательным плоскостям сферического пояса.

По формуле (17) может быть найдена площадь поверхности сферического сегмента. (Одна из плоскостей касается сферы.) Если же в формуле (17) взять $h = 2R$ (обе плоскости касаются сферы), то получим уже известную формулу площади всей сферы $S_{сф} = 4\pi R^2$. Отметим, что мы могли бы обратить рассуждения параграфа 6.3 и использовать полученную формулу площади сферы для нахождения объёма шара.

Задачи, задания, вопросы

1 **(в).** Несколько плоскостей, перпендикулярных диаметру сферы, делят его на равные части. Докажите, что эти плоскости делят сферу на части равной площади.

2. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна стороне её основания и равна 2. Сфера с центром в вершине этой пирамиды касается сторон основания пирамиды. Найдите площади частей сферы, расположенных по разные стороны от основания.

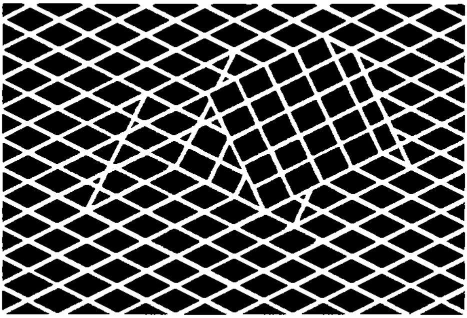
3. Рассмотрим сферу, касающуюся всех рёбер единичного куба. Поверхность куба делит сферу на несколько частей. Сколько получилось частей? Найдите площади этих частей.

4. Шар радиусом R пересечён плоскостью, проходящей на расстоянии d от его центра. Найдите объёмы получившихся частей.

5. Центр первой сферы радиусом R расположен на поверхности второй сферы. Известно, что эти сферы пересекаются. Найдите площадь части второй сферы, расположенной внутри первой.

7

Правильные многогранники



7.1. Определение правильного многогранника

Среди плоских многоугольников можно выделить класс правильных многоугольников. Как мы знаем, для каждого натурального n на плоскости существует правильный n-угольник. А что имеет место в пространстве? Существуют ли правильные многогранники? И вообще, какие многогранники следует называть правильными?

С глубокой древности человеку известны пять удивительных многогранников (рис. 110). По числу граней их называют **тетра-**

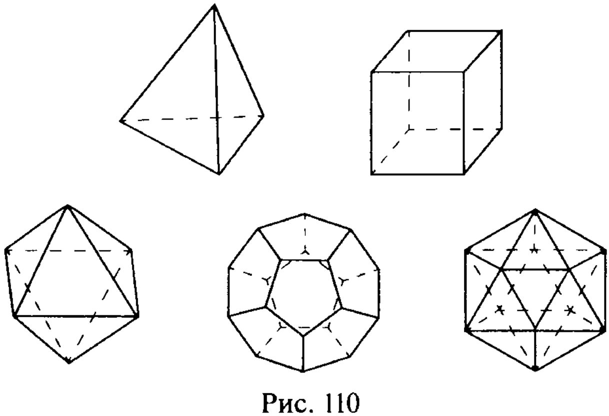


Рис. 110

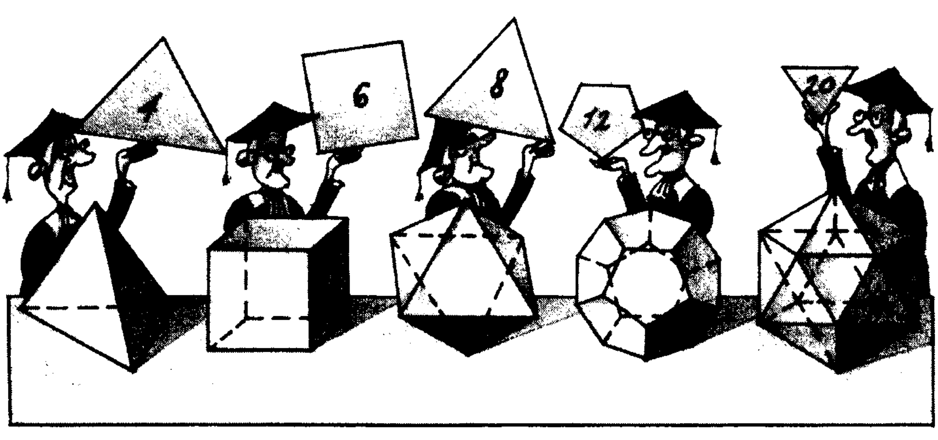
эдр (четырёхгранник, который ранее называли правильным тетраэдром, а не произвольная треугольная пирамида), **гексаэдр** (шестигранник или куб), **октаэдр** (восьмигранник), **додекаэдр** (двенадцатигранник), **икосаэдр** (двадцатигранник). Свойства этих многогранников изучали учёные и священники, их модели можно было увидеть в работах архитекторов и ювелиров, им приписывались различные магические и целебные свойства. Великий древнегреческий философ Платон, живший в IV—V вв. до нашей эры, считал, что эти тела олицетворяют сущность природы. Четыре сущности природы были известны человечеству: ***огонь***, ***вода***, ***земля*** и ***воздух***. По мнению Платона, их атомы имели вид правильных многогранников: атом огня имел вид тетраэдра, земли — гексаэдра (куба), воздуха — октаэдра и, наконец, атом воды имел вид икосаэдра. Эта теория была изложена в знаменитой работе «Диалог Тимей» (Τιμαιοσ).

Но оставался додекаэдр, которому не было соответствия. Платон предположил, что существует ещё одна (пятая) сущность. Он назвал её ***мировым эфиром***. Атомы этой пятой сущности и имели вид додекаэдра. Платон и его ученики в своих работах большое внимание уделяли перечисленным многогранникам. Поэтому эти многогранники называют также **платоновыми телами**.

И всё же какие многогранники следует называть правильными?

Определение 26

Многогранник называется правильным, если все его грани — равные между собой правильные многоугольники, из каждой вершины выходит одинаковое число рёбер и все двугранные углы равны.



То, что правильные многогранники существуют, мы уже говорили. С двумя правильными многогранниками мы неоднократно встречались в предыдущих главах. Это тетраэдр, точнее, правильный тетраэдр, поскольку раньше мы тетраэдром называли любой четырёхгранник (произвольную треугольную пирамиду) и куб — гексаэдр. Остаётся познакомиться ещё с тремя правильными многогранниками и понять, почему их именно пять.

Отметим, что в математической литературе часто используют другие определения правильных многогранников, эквивалентных определению 26. Одно из самых популярных следующее. *Правильный многогранник — это многогранник, у которого все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы — равные и правильные (многогранный угол называется правильным, если все его плоские и двугранные углы равны).*

Это определение, очевидно, равносильно приведённому нами. Однако его можно несколько ослабить: *правильный многогранник — это такой выпуклый многогранник, все грани которого — равные правильные многоугольники, причём в каждой вершине сходится одно и то же число граней.*

Чтобы доказать, что это определение эквивалентно предыдущим двум, нужно поработать гораздо больше, чем раньше, и использовать несколько сложных утверждений. Поэтому мы используем более простое, но вполне классическое определение 26.

Докажем сначала, что правильных многогранников, т. е. многогранников, удовлетворяющих определению 26, не более пяти видов, затем «предъявим» каждый из них и докажем тем самым их существование.

7.2*. Ограниченность числа видов правильных многогранников

Прежде чем сформулировать основную теорему, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма

Если на рёбрах многогранного угла с вершиной S, у которого равны все плоские углы и все двугранные углы (т. е. правильного многогранного угла), взять точки A_1, A_2, ..., A_n так, что $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$, то эти точки лежат в одной плоскости и служат вершинами правильного n-угольника.

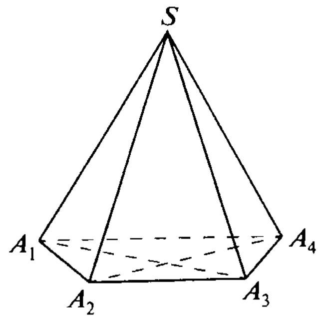


Рис. 111

Доказательство. Докажем, что любые идущие подряд четыре точки лежат в одной плоскости. Рассмотрим точки A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 111). Пирамиды $SA_1A_2A_3$ и $SA_2A_3A_4$ равны, поскольку их можно совместить, совместив рёбра SA_2 и SA_3 (берутся рёбра разных пирамид) и двугранные углы при этих рёбрах. Из этого следует, что равны также пирамиды $SA_1A_3A_4$ и $SA_1A_2A_4$, поскольку у них оказываются равными все соответствующие рёбра. Из равенств этих пирамид следует также равенство

$$V_{SA_1A_2A_3} + V_{SA_1A_3A_4} = V_{SA_2A_3A_4} + V_{SA_1A_2A_4}.$$

Из последнего равенства можно сделать вывод, что объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен нулю, т. е. указанные четыре точки лежат в одной плоскости. Следовательно, все n точек лежат в одной плоскости и в n-угольнике $A_1A_2...A_n$ равны все стороны и углы. Значит, он правильный. Лемма доказана.▼

Теорема 7.1 *(о числе правильных многогранников)*

Существует не более пяти различных видов правильных многогранников.

Доказательство. Из определения правильного многогранника следует, что гранями правильного многогранника могут быть три вида правильных многоугольников: треугольники, четырёхугольники и пятиугольники.

В самом деле, грани не могут быть шестиугольниками, поскольку в каждой вершине должны сходиться не менее трёх граней. Но углы в правильном шестиугольнике равны 120°, сумма трёх углов равна 360°, а сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° (см. задачу 18 к § 2.4). Тем более гранями правильного многогранника не могут быть многоугольники с числом сторон, большим шести.

Далее, если все грани — треугольники, то к каждой вершине могут прилегать не более пяти треугольников: в противном случае сумма плоских углов при одной вершине будет не менее 360°, что невозможно. Таким образом, если все грани многогранника — треугольники, то возможны три случая: к каждой вершине прилегают три, четыре или пять треугольников. Если же все грани правильного многогранника — четырёхугольники или пятиугольники, то из каждой вершины должны выходить ровно три ребра, т. е. в каждой вершине сходятся три грани (есть ещё две возможности).

Для каждой из пяти перечисленных возможностей существует не более одного многогранника с заданной длиной ребра. Рассмотрим, например, случай, когда все грани — пятиугольники. Предположим, что существуют два многогранника, все грани которых — правильные пятиугольники со стороной a, а все двугранные углы в каждом многограннике равны между собой. (Хотя и не обязательно двугранные углы одного равны углам другого. Именно это и надо доказать.) Из любой вершины каждого многогранника выходит три ребра. Пусть из вершины A одного многогранника выходят рёбра AB, AC и AD, а из вершины A_1 другого — рёбра A_1B_1, A_1C_1 и A_1D_1 (рис. 112). Имеем $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — равные правильные треугольные пирамиды. (У них равны рёбра, выходящие из вершин A и A_1, и плоские углы при этих вершинах, следовательно, все рёбра этих пирамид попарно равны.) Получаем, что двугранные углы одного многогранника равны двугранным углам другого. Из этого следует, что, если мы совместим пирамиды $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, совместятся и сами многогранники. Значит, в самом деле, если существует правильный многогранник, все грани которого — правильные пятиугольники со стороной a, то такой многогранник единственный.

Аналогично рассматриваются остальные четыре случая. Следует только иметь в виду, что в случаях, когда все грани — треугольники и к каждой вершине прилегают четыре или пять треугольников, следует воспользоваться леммой. Из неё будет следовать, что концы рёбер, выходящих из одной вершины, лежат в одной плоскости и служат вершинами правильного четырёх- или пятиугольника. Теорема доказана полностью.▼

Замечание. Из теоремы ещё не следует, что существует именно пять видов правильных многогранников. Доказано, что их не более пяти. Осталось доказать, что соответствующие многогранники в самом деле существуют, «предъявить» их.

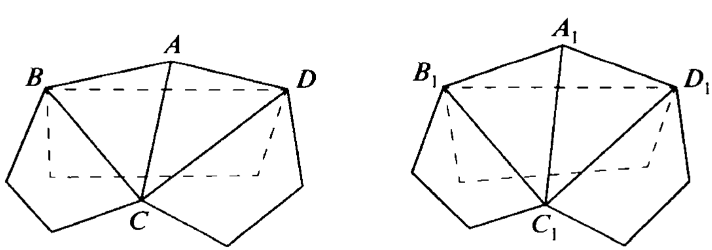


Рис. 112

7.3. Тетраэдр, гексаэдр (куб) и октаэдр

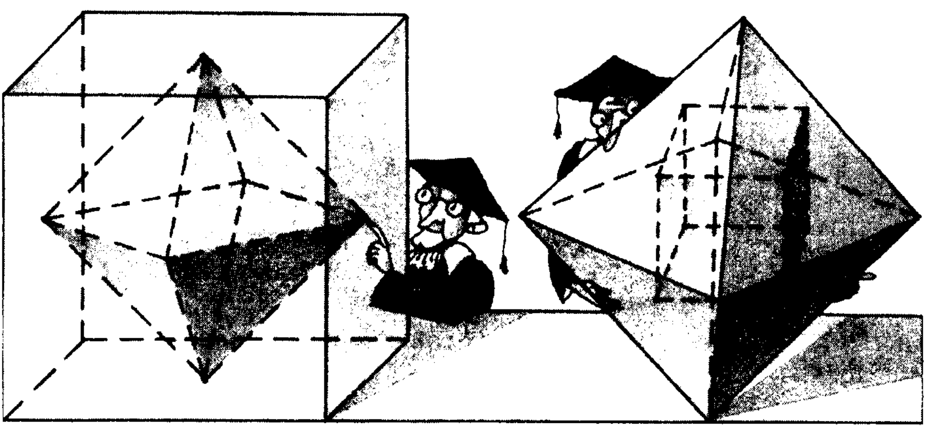
Чтобы доказать существование именно пяти различных видов правильных многогранников, для каждого возможного случая, указанного в теореме 7.1, построим многогранник с нужными свойствами.

Тетраэдр. Правильный тетраэдр, т. е. тетраэдр с равными рёбрами, представляет собой правильный многогранник, у которого все грани правильные треугольники и из каждой вершины выходит ровно три ребра (к ней прилежат три грани). Других таких многогранников нет. Точнее, все такие многогранники подобны между собой и полностью определяются длиной ребра. Это следует из теоремы 7.1. В этом (самом простом случае) можно и не ссылаться на теорему, поскольку существование и единственность многогранника с нужными свойствами вполне очевидны.

Гексаэдр (куб). Куб или правильный шестигранник (гексаэдр) является правильным многогранником, у которого все грани квадраты (правильные четырёхугольники) и из каждой вершины выходят ровно три ребра (к ней прилежат три грани).

Октаэдр. Нетрудно доказать существование правильного многогранника, все грани которого — правильные треугольники и к каждой вершине прилегают четыре грани. Такой многогранник имеет восемь граней и называется октаэдром (восьмигранник). Построить его можно следующим образом.

Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду *ABCDE* с основанием *ABCD*, все рёбра которой равны между собой. Построим ещё одну такую же пирамиду *ABCDG*, расположенную по другую сторону от плоскости *ABCD*. Получившийся много-



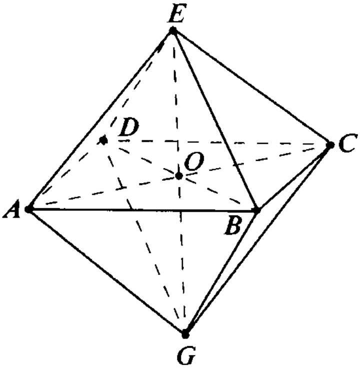
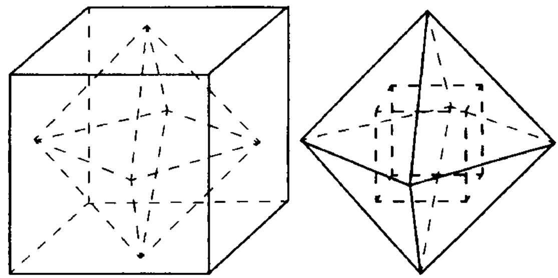


Рис. 113



а) *б*)

Рис. 114

гранник $ABCDEG$ (рис. 113) является правильным. Чтобы это проверить, надо лишь доказать, что у него равны все двугранные углы. Сделать это можно следующим образом.

Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Соединим точку O со всеми вершинами нашего многогранника. Получим восемь треугольных пирамид с общей вершиной O. Рассмотрим одну из них, например $ABEO$. Рёбра AO, BO и EO равны и попарно перпендикулярны. Пирамида $ABEO$ правильная (ABE — основание). Все двугранные углы при основании ABE равны. Кроме того, все восемь пирамид с вершиной O и основаниями — гранями восьмигранника $ABCDEG$ — равны между собой. Значит, равны все двугранные углы этого восьмигранника, поскольку каждый из них в два раза больше двугранного угла при основании одной из восьми указанных пирамид.▼

Итак, мы доказали существование ещё одного правильного многогранника. Гексаэдр (куб) и октаэдр образуют **двойственную пару** многогранников. У куба 6 граней, 12 рёбер и 8 вершин. У октаэдра 8 граней, 12 рёбер и 6 вершин. Как видим, число граней одного многогранника равно числу вершин другого, и наоборот. Но важно не только это. Возьмём любой куб и рассмотрим многогранник с вершинами в центрах его граней (рис. 114, *а*). Как нетрудно убедиться, получим октаэдр. И наоборот, центры граней октаэдра служат вершинами куба (рис. 114, *б*). Именно в этом и состоит двойственность куба и октаэдра. Если же взять центры граней (правильного) тетраэдра (рис. 115), то получим (правильный) тетраэдр. Говорят, что тетраэдр двойствен самому себе.

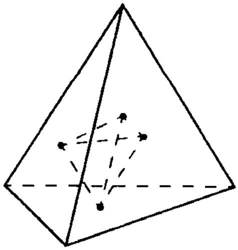


Рис. 115

Задачи, задания, вопросы

1. Правильный тетраэдр с ребром 1 пересечён плоскостью так, что сечением является квадрат. Чему равна сторона этого квадрата? Найдите площадь сечения, по которому эта плоскость пересекает тетраэдр с вершинами в центрах данного тетраэдра.

2. Найдите объём, радиус вписанного шара и радиус описанной сферы для октаэдра с ребром a.

3. Во сколько раз объём куба больше объёма октаэдра с вершинами в центрах граней этого куба (т. е. октаэдра, двойственного этому кубу)?

4. Во сколько раз объём октаэдра больше объёма двойственного ему куба (т. е. куба с вершинами в центрах граней октаэдра)?

5. Рассмотрим единичный куб и октаэдр с вершинами в центрах граней куба. Определите вид и найдите площади сечений, по которым каждый из этих многогранников пересекает плоскость, проходящая через середину диагонали куба и ей перпендикулярная.

6. Рассмотрим многогранник с вершинами в серединах рёбер правильного тетраэдра. Является ли этот многогранник правильным?

7. Рассмотрим четыре плоскости, каждая из которых пересекает три ребра правильного тетраэдра, отсекая от него правильный тетраэдр. Все грани оставшегося многогранника являются правильными многоугольниками. Найдите отношение объёма этого многогранника к объёму исходного тетраэдра. (Укажите все возможности.)

8. Рассмотрим многогранник, получающийся из куба отсечением от него восьми правильных треугольных пирамид. (Вершины оснований этих пирамид находятся на трёх рёбрах куба, выходящих из одной вершины.) Все грани этого многогранника — правильные многоугольники. Найдите отношение его объёма к объёму куба.

9. В октаэдре, ребро которого равно 1, проведены плоскости, каждая из которых пересекает четыре ребра октаэдра, выходящие из одной вершины. Эти плоскости отсекают от октаэдра шесть правильных четырёхугольных пирамид. Все грани получившегося многогранника — правильные многоугольники с вершинами на рёбрах октаэдра. Найдите объём этого многогранника.

10. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности октаэдра с ребром 1, соединяющего середины противоположных рёбер октаэдра.

11. В каких пределах может меняться ребро правильного тетраэдра, все вершины которого расположены на поверхности единичного куба?

7.4*. Октаэдр и икосаэдр

Осталось доказать существование ещё двух видов правильных многогранников. В этом нам помогут уже известные правильные многогранники, и прежде всего октаэдр.

***Теорема** 7.2 (о существовании икосаэдра)*

Существует правильный многогранник, у которого все грани — треугольники и из каждой вершины выходит 5 рёбер. У этого многогранника 20 граней, 30 рёбер и 12 вершин.

Многогранник, о котором говорится этой в теореме, называется **икосаэдром.**

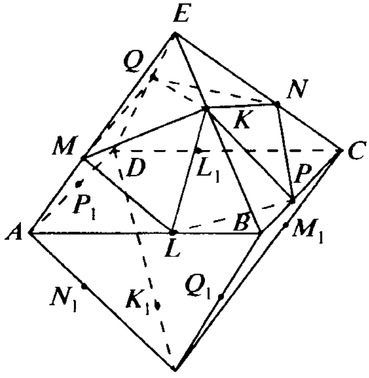


Рис. 116

Доказательство. Рассмотрим октаэдр $ABCDEG$ с ребром 1. Возьмём на рёбрах AE, BE, CE, DE, AB и BC точки M, K, N, Q, L и P соответственно так, что $AM = EK = CN = EQ = BL = BP = x$. Найдём x так, чтобы все отрезки, соединяющие эти точки, как показано на рисунке 116, были равны между собой. Для этого достаточно выполнения равенства $KM = KQ$. Но $KQ = KE\sqrt{2} = x\sqrt{2}$ (KEQ — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами KE и EQ). По теореме косинусов для треугольника MEK ($ME = 1 - x$, $KE = x$, $\angle MEK = 60°$) имеем

$$KM^2 = ME^2 + KE^2 - 2ME \cdot KE \cos 60° = (1-x)^2 + x^2 - (1-x)x.$$

Получаем для x уравнение

$$(1-x)^2 + x^2 - (1-x)x = 2x^2 \text{ или } x^2 - 3x + 1 = 0,$$

откуда $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. (Второй корень больше 1.)

Возьмём ещё шесть точек, симметричных точкам K, L, P, N, Q и M относительно центра октаэдра. Обозначим эти точки через K_1, L_1, P_1, N_1, Q_1 и M_1 соответственно. Получившийся многогранник с вершинами K, L, P, N, Q, M, K_1, L_1, P_1, N_1, Q_1 и M_1 и есть требуемый правильный многогранник: все его грани правильные треугольники, из каждой вершины выходит пять рёбер. (На рисунке 116 изображена лишь часть этого многогранника — пирамида $MLPNQK$.) Осталось доказать, что все двугранные углы равны между собой.

Заметим, что все вершины построенного многогранника находятся на равном расстоянии от точки O — центра октаэдра, т. е. расположены на поверхности сферы с центром в O. Теперь можно почти дословно повторить рассуждение, с помощью которого мы доказали, что у октаэдра равны двугранные углы. Соединив точку O со всеми вершинами полученного двадцатигранника, разобьём его на 20 правильных и равных треугольных пирамид. Основанием каждой из них является соответствующая грань двадцатигранника. Теперь каждый из двугранных углов рассматриваемого двадцатигранника оказывается равным удвоенному углу при основании каждой из пирамид нашего разбиения. Следовательно, все двугранные углы равны. Полученный двадцатигранник — правильный. ▼

7.5. Додекаэдр

Осталось доказать существование ещё одного, последнего вида правильных многогранников.

Теорема 7.3 *(о существовании додекаэдра)*

Существует правильный многогранник, все грани которого — пятиугольники. Этот многогранник имеет 12 граней, 30 рёбер и 20 вершин.

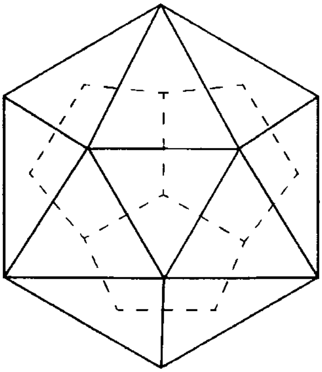


Рис. 117

Многогранник, о котором говорится в теореме, называется **додекаэдром**.

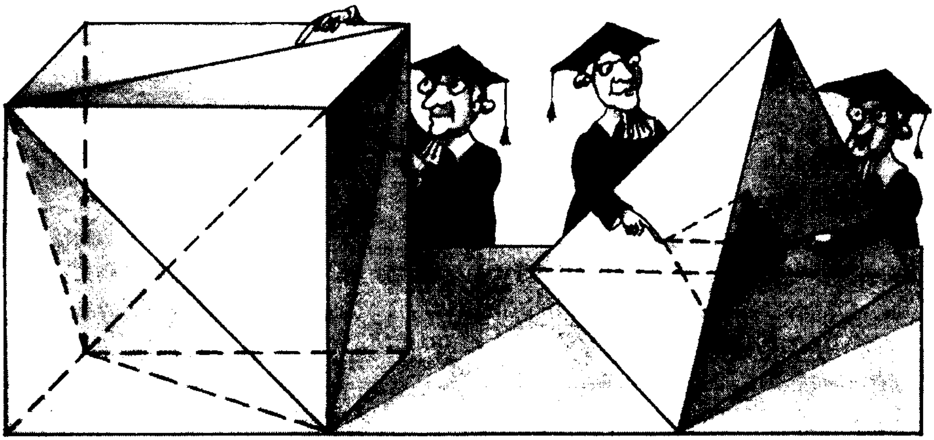
Доказательство. Возьмём икосаэдр и рассмотрим многогранник с вершинами в центрах его граней (рис. 117). Центры пяти граней икосаэдра, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости и служат вершинами правильного пятиугольника. Каждой вершине икосаэдра соответствует грань нового многогранника. Гранями нового многогранника служат равные правильные пятиугольники. Все двугранные углы равны. Ведь любые три ребра, выходящие из одной вершины нового многогранника, можно рассматривать как боковые рёбра правильной треугольной пирамиды, и все получающиеся при этом пирамиды равны. (У них равны боковые рёбра и плоские углы между ними, которые являются углами правильного пятиугольника.) Итак, построенный таким образом многогранник является правильным. Это — додекаэдр. У него 12 граней (столько вершин у икосаэдра), 30 рёбер (как и у икосаэдра) и 20 вершин (столько у икосаэдра граней).▼

Тем самым завершено доказательство утверждения, что в трёхмерном евклидовом пространстве существует ровно пять различных видов правильных многогранников. При этом мы определили, какие именно виды многогранников существуют в трёхмерном пространстве.

Центры граней правильного многогранника служат вершинами также правильного многогранника, двойственного рассматриваемому. Двойственным многогранником к тетраэдру является сам тетраэдр. Все остальные многогранники разбиваются на двойственные пары: гексаэдр (куб) и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Додекаэдр был введён именно как двойственный икосаэдру. Понятно, что центры граней додекаэдра, в свою очередь, являются вершинами икосаэдра.

7.6*. Взаимосвязь между всеми правильными многогранниками

Икосаэдр был построен с помощью октаэдра. Центры граней икосаэдра, как известно, являются вершинами додекаэдра, а центры граней октаэдра — вершинами куба. Восемь из 20 вер-



шин построенного указанным способом додекаэдра совпадают с центрами граней октаэдра, т. е. являются вершинами куба. (Понятно, что выбрать из 20 вершин 8, являющихся вершинами куба, можно различными способами.) Таким образом, все пять правильных многогранников тесно связаны между собой, взаимно порождают друг друга. Пары октаэдр — куб, октаэдр — икосаэдр, икосаэдр — додекаэдр изображены соответственно на рисунках 114, *а*, *б*, 116, 117. На рисунке 118 изображён куб и описанный около него додекаэдр, а на рисунке 119 изображён куб и вписанный в него (правильный) тетраэдр.

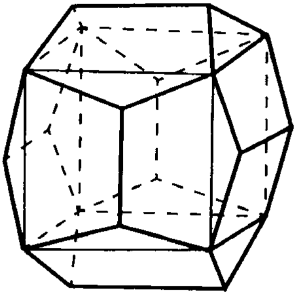


Рис. 118

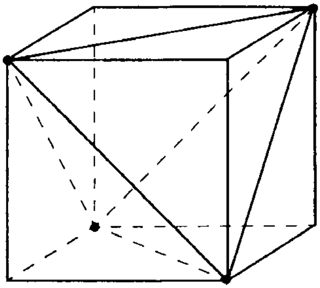


Рис. 119

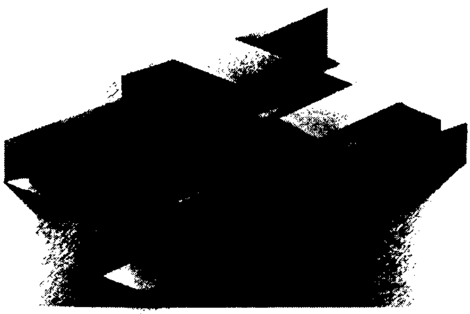
Задачи, задания, вопросы

1. Найдите ребро икосаэдра, вписанного в единичный октаэдр так, как это сделано при доказательстве теоремы 7.1.

2. Найдите объём, радиус вписанного шара и радиус описанной сферы для икосаэдра с ребром a.
3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности икосаэдра между противоположными его вершинами, если ребро икосаэдра равно a.
4. Определите вид сечения икосаэдра плоскостью, которая проходит через середину его диагонали, соединяющей противоположные вершины, и перпендикулярна этой диагонали.
5. Чему равны двугранные углы икосаэдра?
6. Чему равны углы между диагоналями, соединяющими противоположные вершины икосаэдра?
7. Можно ли через некоторую точку пространства провести шесть различных прямых так, что все попарные углы между этими прямыми равны?
8. Найдите объём, радиус описанного и вписанного шара для додекаэдра с ребром a.
9. Найдите двугранные углы додекаэдра.
10. Определите вид сечения, по которому пересекает додекаэдр плоскость, параллельная двум его противоположным граням и равноудалённая от них.
11. В пространстве расположены три правильных пятиугольника $ABCDE$, $ABKCM$ и $KBCEF$. Докажите, что прямые BD, BM и BF перпендикулярны.

8

Координаты и векторы в пространстве



8.1. Декартовы координаты в пространстве

Рассмотрим в пространстве три попарно перпендикулярные прямые, проходящие через точку O. Будем считать, что каждая из этих прямых является координатной осью с началом в точке O и равными единичными отрезками. Занумеруем оси и назовём первую из осей осью Ox, вторую — осью Oy и третью — осью Oz.

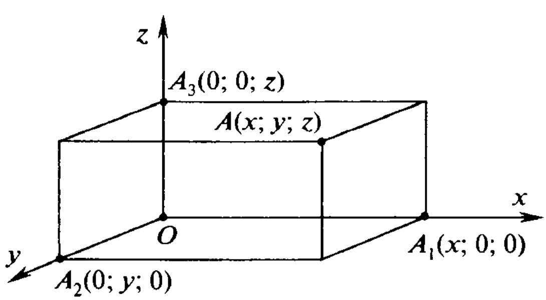


Рис. 120

Эти три оси образуют в пространстве *декартову систему координат*. Теперь каждой точке A пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел $(x; y; z)$ — координаты этой точки. Будем записывать это следующим образом: $A(x; y; z)$. Здесь x — первая координата точки A или координата на оси Ox точки A_1 — проекции A на эту ось (рис. 120). Аналогично определяются числа y и z. Обратно, каждой тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует точка в пространстве.

Введя таким образом координаты в пространстве, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками чисел.

8.2. Формула расстояния между двумя точками. Уравнение сферы

Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — две точки в пространстве. Тогда длина отрезка AB вычисляется по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Эта формула, по сути, выражение длины диагонали прямоугольного параллелепипеда через длины трёх попарно перпендикулярных рёбер по теореме Пифагора для прямоугольного параллелепипеда (теорема 2.9): если мы через точки A и B проведём всевозможные плоскости, перпендикулярные осям (рис. 121), то получим прямоугольный параллелепипед с рёбрами $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$, $|z_1 - z_2|$ и диагональю AB. (Если какие-то одноимённые координаты равны, то параллелепипед вырождается в прямоугольник или даже отрезок.)

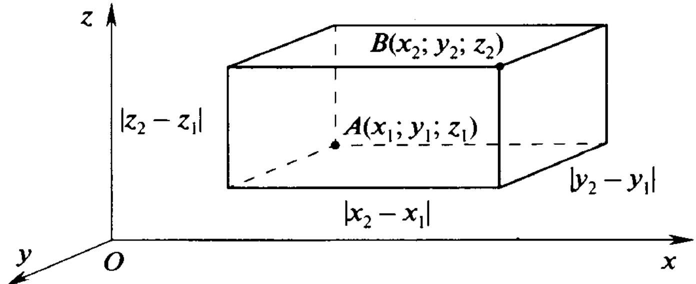


Рис. 121

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что множество точек $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \qquad (*)$$

где a, b, c и R — заданные числа, есть сфера радиусом R с центром в точке $Q(a; b; c)$, т. е. уравнение (*) является уравнением сферы.

Задачи, задания, вопросы

1. Найдите расстояние между точками A и B: а) $A(1; 2; 3)$, $B(-2; -3; 1)$; б) $A(-1; -3; 0)$, $B(3; -4; 5)$.

2 **(в).** Найдите координаты точки M, расположенной на оси Ox и равноудалённой от точек $A(-2; 4; 1)$, $B(1; 1; 2)$.

3. Найдите координаты точек, расположенных в координатных плоскостях, каждая из которых равноудалена от трёх точек (0; 0; 3), (0; 4; 0), (5; 0; 0).

4 **(в).** Напишите уравнение сферы, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке $Q(-1; 2; -3)$.

5. Напишите уравнение сферы, для которой точки $A(1; -2; 3)$ и $B(-3; 4; -1)$ являются диаметрально противоположными.

6. Напишите уравнение сферы, проходящей через точки $A(0; 2; 3)$ и $B(-1; 0; 2)$ с центром на оси Oy.

7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z = 0$ есть уравнение сферы. Найдите её центр и радиус.

8. Найдите уравнение сферы с центром в точке $Q(-1; 3; 2)$ и касающейся плоскости yOz.

9. Найдите уравнение сферы с центром в точке $Q(3; -1; 4)$, касающейся оси Ox.

10. Найдите уравнение сферы с центром в точке $Q(-1; 0; 2)$, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$.

11. Найдите координаты центра и радиус сферы, проходящей через точки (0; 0; 0), (3; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; 5).

8.3. Уравнение плоскости

В этом параграфе мы докажем одну важную теорему.

Теорема 8.1 (*общий вид уравнения плоскости*)

Любая плоскость в декартовой системе координат может быть задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$, где хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

Обратно, любое уравнение $ax + by + cz + d = 0$ при условии, что хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля, есть уравнение плоскости.

Доказательство. Рассмотрим плоскость L. Пусть $A(m; n; p)$ — некоторая точка пространства, $A_0(m_0; n_0; p_0)$ — проекция A на плоскость L, $M(x; y; z)$ — произвольная точка плоскости L (рис. 122). Поскольку прямая AA_0 перпендикулярна плоскости L, она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, т. е. перпендикулярна прямой A_0M. Запишем теорему Пифагора для треугольника AA_0M:

$$AA_0^2 + A_0M^2 = AM^2,$$

$$(m - m_0)^2 + (n - n_0)^2 + (p - p_0)^2 + (x - m_0)^2 + (y - n_0)^2 + (z - p_0)^2 =$$
$$= (x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2.$$

После очевидных преобразований получим:

$$(m - m_0)x + (n - n_0)y + (p - p_0)z + (m_0 - m)m_0 +$$
$$+ (n_0 - n)n_0 + (p - p_0)p_0 = 0. \qquad (*)$$

Итак, мы доказали, что координаты любой точки, лежащей в плоскости L, удовлетворяют уравнению

$$ax + by + cz + d = 0,$$

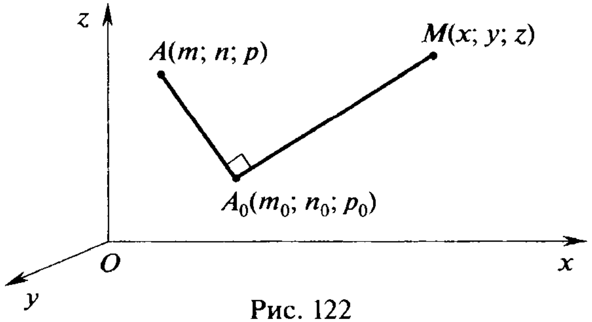


Рис. 122

где

$$a = m - m_0,\ b = n - n_0,\ c = p - p_0,$$
$$d = (m_0 - m)m_0 + (n_0 - n)\,n_0 + (p - p_0)\,p_0.$$

Здесь, кроме того, $(m; n; p)$ — координаты некоторой точки A, не лежащей в рассматриваемой плоскости; $(m_0; n_0; p_0)$ — координаты точки A_0 — проекции точки A на эту плоскость. Понятно, что точки, не принадлежащие плоскости, полученному уравнению не удовлетворяют. Первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Рассмотрим уравнение

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

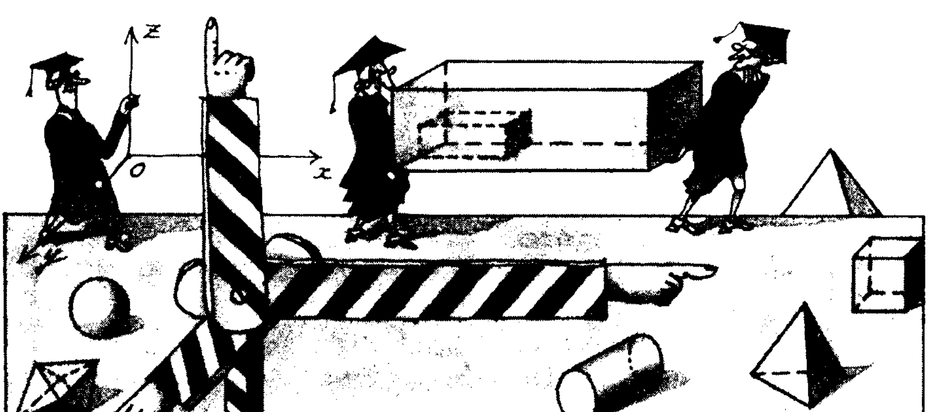
Возьмём какую-то точку $A_0(m_0; n_0; p_0)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, т. е. $am_0 + bn_0 + cp_0 + d = 0$. Из условия $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ следует, что такая точка непременно найдётся. Если, например, $a \neq 0$, то можно взять $m_0 = -\frac{d}{a}$, $n_0 = p_0 = 0$.

Возьмём точку $A(m; n; p)$, где $m = a + m_0$, $n = b + n_0$, $p = c + p_0$. (Понять, какую точку следует взять, нам помогли формулы, полученные при доказательстве первой части теоремы.) Запишем теперь уравнение плоскости, проходящей через точку A_0 и перпендикулярной прямой AA_0. Получим уравнение (*). Заменим в нём m, n и p соответствующими выражениями ($m = a + m_0$, $n = b + n_0$, $p = c + p_0$). В результате простых преобразований придём к уравнению

$$ax + by + cz - am_0 - bn_0 - cp_0 = 0.$$

А так как

$$am_0 + bn_0 + cp_0 + d = 0,$$



то получаем уравнение

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Таким образом, данное уравнение и в самом деле задаёт плоскость. Теорема доказана полностью.▼

Заметим, что уравнения $ax + by + cz + d = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ задают одну и ту же плоскость, если $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, $c_1 = \lambda c$ и $d_1 = \lambda d$ ($\lambda \neq 0$). Следовательно, мы всегда можем выбрать одно из этих чисел удобным нам способом, восстановив остальные таким образом, чтобы сохранились все отношения $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и т. п.

При выводе уравнений конкретных плоскостей не обязательно поступать так же, как при доказательстве теоремы: находить точки A и A_0, а затем записывать уравнение. Решим следующую задачу.

Задача. *Найти уравнение плоскости, проходящей через следующие точки*: (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3).

Решение. Как мы знаем, уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Подставим в это уравнение координаты данных точек. Получим систему: $a + d = 0$, $2b + d = 0$, $3c + d = 0$, из которой можно выразить все коэффициенты через d и подставить в уравнение. Все эти уравнения при разных d задают одну и ту же плоскость. Полагая для удобства $d = -6$, получаем уравнение $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.▼

Задачи, задания, вопросы

1 (в). Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -2; 4)$ и перпендикулярной прямой OA, где O — начало координат.

2 (в). Найдите уравнение плоскости, пересекающей оси координат в точках $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$.

3 (в). Докажите, что плоскости, которые задаются уравнениями $ax + by + cz + d = 0$ и $ax + by + cz + d_1 = 0$ ($d \neq d_1$), параллельны.

4 (в). Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2; 0; 3)$ и параллельной плоскости $2x - y - 3z + 5 = 0$.

5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через середину AB и перпендикулярной AB, где $A(1;\ -4;\ 3)$, $B(-5;\ 2;\ 1)$.

6. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ -1)$, $C(-2;\ 2;\ 0)$.

7 (т). Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости $x + 2y + 3z = 0$ и касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. Докажите, что точки $A(1;\ -1;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ 2)$, $C(-3;\ 1;\ 1)$ и $D(-2;\ 3;\ 3)$ расположены в одной плоскости.

9. Найдите расстояние от начала координат до плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

10 (т). Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $(3;\ 0;\ 0)$ и $(0;\ -2;\ 0)$ и касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.

8.4. Уравнение прямой линии

Название этого параграфа не совсем точно. Прямую линию в пространстве обычно задают двумя уравнениями, точнее, двумя уравнениями плоскости. В самом деле, любые две непараллельные друг другу плоскости пересекаются по прямой, так что можно сказать, что система из двух уравнений плоскости задаёт прямую (конечно, существует много способов выбрать плоскости, пересекающиеся по заданной прямой). Найдём, например, уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(a;\ b;\ c)$. Пусть все координаты точки A отличны от нуля. Рассмотрим произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ на луче OA (рис. 123). Очевидно, что

$$\frac{x}{a} = \frac{OM}{OA} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

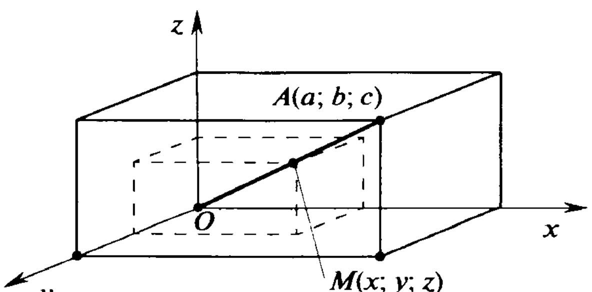


Рис. 123

8.4

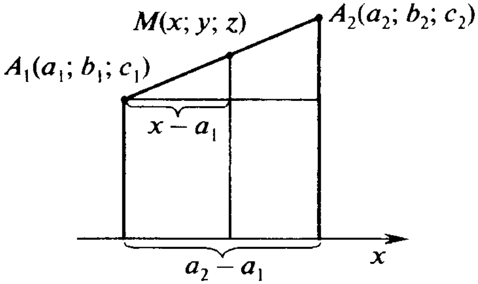


Рис. 124

Равенства $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ верны и для луча, дополнительного к OA, и задают прямую OA. Их можно записать в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} bz - cy = 0, \\ cx - az = 0, \end{cases}$$

каждое из которых задаёт плоскость.

Возьмём теперь точки $A_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ и $A_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$. Найдём уравнение прямой A_1A_2. Рассмотрим случай, когда соответственные координаты этих точек не равны. Пусть $M(x; y; z)$ — некоторая точка на прямой A_1A_2, причём для определённости на луче A_1A_2. Из соответствующих подобий (рис. 124) получаем

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{A_1M}{A_1A_2}.$$

Такими же будут и отношения $\frac{y - b_1}{b_2 - b_1}$, $\frac{z - c_1}{c_2 - c_1}$. Следовательно, прямая, проходящая через точки $A_1(a_1; b_1; c_1)$ и $A_2(a_2; b_2; c_2)$, если соответствующие координаты этих точек различны, задаётся равенствами

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_1}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда среди координат точек A_1 и A_2 есть равные. Пусть $c_1 = c_2 = c$. Тогда для всех точек прямой A_1A_2 имеем $z = c$, и если $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, то соответствующую прямую задаёт система

$$\begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \dfrac{y - b_1}{b_2 - b_1}, \\ z = c. \end{cases}$$

Задачи, задания, вопросы

1. Запишите уравнения, задающие прямую, которая проходит через точки $A(-2; 1; 3)$ и $B(1; 5; -3)$.
2. Предложите способ, с помощью которого можно задать прямую одним уравнением.
3 **(п).** Через точки $A(-2; 3; 5)$ и $B(3; -1; 4)$ проходит прямая. Найдите координаты точек, в которых эта прямая пересекает плоскости xOy, yOz и zOx.
4. Найдите координаты точки, в которой прямая, проходящая через точки $A(3; 2; 1)$ и $B(2; 1; 3)$, пересекает плоскость $x - 3y + 2z = 11$.
5 **(т).** Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от точек $A(1; -3; -5)$, $B(2; 4; 6)$ и $C(-1; 2; -4)$.
6 **(т).** Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = r^2 (h - z)^2$ при условии $0 \leqslant z \leqslant h$ задаёт боковую поверхность прямого кругового конуса.
7 **(т).** Запишите уравнения, задающие прямую, проходящую через точку $(3; 2; -2)$ и пересекающую ось Ox и прямую $x = 1, y = -2$.
8. Найдите координаты точки, которая симметрична точке $A\ (4; -3; 5)$ относительно прямой $x = y = z$.
9. Чему равно наименьшее расстояние между точкой M на оси Ox и точкой K, расположенной на прямой, проходящей через точки $A(4; 5; -2)$ и $B(7; 6; 3)$?
10. Запишите уравнения, задающие прямую, проходящую через точку $A(1; 1; 1)$ и параллельную прямой, задаваемой уравнениями $x - 2y - 3z = 0$ и $2x + y - z = 2$.

8.5. Векторы в пространстве

Определение вектора, данное в курсе планиметрии, сохраняется и в пространстве. **Вектор** AB (записывается $\overrightarrow{AB}$) — это направленный отрезок, задаваемый двумя точками A и B пространства, при этом первая точка — точка A — является началом вектора, а вторая точка — точка B — его концом. Таким же, как и на плоскости, остаётся понятие равенства двух векторов. Не лежащие на одной прямой векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), если $ABDC$ — параллелограмм. **Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.**

Как и в планиметрии, символ $|\vec{a}|$ обозначает длину вектора $\vec{a}$ или модуль $\vec{a}$.

Нулевой вектор, т. е. вектор длиной 0, считается коллинеарным любому вектору.

Так же как и на плоскости, определяется операция умножения вектора на число: равенство $\vec{b} = k\vec{a}$ означает, что вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ и при этом $|\vec{b}| = |k|\,|\vec{a}|$; направление вектора $\vec{b}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно его направлению, если $k < 0$.

Так же как и на плоскости, определяется операция сложения двух векторов. Определением этой операции можно считать равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

В пространстве появляется одно новое понятие. **Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве называются компланарными, если существует плоскость, параллельная всем этим трём векторам.** (Напомним, что нулевой вектор параллелен любой прямой, а тем более любой плоскости.)

8.6. Теорема о единственности представления любого вектора в пространстве через три некомпланарных вектора

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — три некомпланарных вектора, $\vec{m}$ — произвольный вектор в пространстве. Выразить вектор $\vec{m}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (иначе — разложить вектор $\vec{m}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$) — это значит найти такие числа x, y и z, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Теорема 8.2 *(о единственности разложения вектора)*

Любой вектор пространства может быть разложен по трём данным некомпланарным векторам, и притом единственным образом.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — три некомпланарных вектора, $\vec{m}$ — произвольный вектор. Можно считать, что начало каждого из векторов находится в точке O. Рассмотрим случай, когда вектор $\vec{m}$ не принадлежит ни одной из плоскостей, задаваемых парами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$. Обозначим через M конец вектора $\vec{m}$. Построим параллелепипед, у которого OM — диагональ, а рёбра параллельны векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 125). Обозначим этот параллелепипед $OAKBCLMN$. Положим $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AK} = y\vec{b}$, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OC} = z\vec{c}$. Таким образом,

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Итак, мы доказали, что любой вектор $\vec{m}$ может быть представлен в виде $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Осталось доказать, что такое представление единственно.

Предположим, что существует другой набор чисел $(x_1; y_1; z_1)$, отличный от набора $(x; y; z)$, для которого также имеет место равенство

$$\vec{m} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}.$$

Вычитая одно представление вектора $\vec{m}$ из другого, получаем

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0.$$

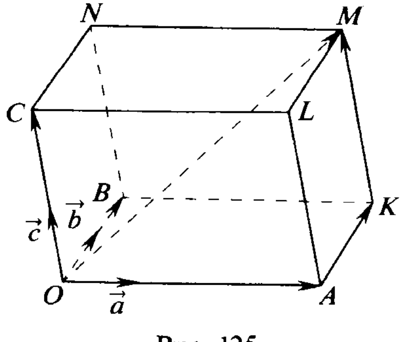


Рис. 125

Если, например, $x \neq x_1$, то вектор $\vec{a}$ может быть выражен через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c} = k\vec{b} + p\vec{c}.$$

Это означает, что вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости, определяемой векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е. $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — компланарные векторы, что противоречит условию. Теорема доказана полностью.▼

Числа x, y, z называются координатами вектора $\vec{m}$ в системе координат, задаваемой векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (или в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$). Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — попарно перпендикулярные векторы единичной длины, то мы получаем декартову систему координат. Отметим, что если задан базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и начало отсчёта — точка O, то любой точке M можно сопоставить координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в этом базисе. Такая **система координат, задаваемая тремя произвольными некомпланарными векторами, называется аффинной**. Тройку попарно перпендикулярных единичных векторов будем обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. В частности, если $(x;\ y;\ z)$ — координаты точки M в декартовой системе координат с началом в точке O, заданной тройкой $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Если же $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — две любые точки в пространстве, то координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ является тройка чисел $(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$.

Задачи, задания, вопросы

1. Пусть $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 2)$, $C(-1;\ -1;\ -1)$, $D(4;\ -3;\ 0)$. Найдите: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{DA}$.
2. Известны координаты четырёх вершин призмы $ABCA_1B_1C_1$, а именно: $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ 1)$, $A_1(3;\ 0;\ -2)$, $C_1(2;\ 2;\ -1)$. Найдите координаты двух оставшихся вершин.

3. Известны координаты четырёх вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$:
а) $A(1; 0; -1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(3; 0; 0)$, $C_1(1; 2; 2)$;
б) $A(-2; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$, $B_1(-3; 1; 0)$, $D_1(-3; 0; 2)$.
Найдите координаты четырёх оставшихся вершин.

4. Для каждого из пунктов а) и б) предыдущей задачи найдите: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{DA_1}$.

5. Выразите вектор $\vec{a}(1; 2; 3)$ через следующие векторы: $\vec{m}(1; 1; 0)$, $\vec{n}(1; 0; 1)$, $\vec{p}(0; 1; 1)$.

6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Выразите векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$; б) выразите векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ через $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$; в) выразите векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ через $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$.

8.7. Скалярное произведение векторов

Напомним определение скалярного произведения, которое было дано в курсе планиметрии.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора, φ — угол между ними, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

Здесь $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из определения скалярного произведения следует одно очень важное свойство, часто используемое при решении различных задач.

Два ненулевых вектора перпендикулярны в том и только в том случае, когда их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
2. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
4. $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
5. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

8.7

Все свойства, кроме свойства 5, очевидны. Доказательство свойства 5, приведённое в курсе планиметрии, почти дословно сохраняется и для пространства. Напомним его.

Рассмотрим декартову систему координат, в которой ось Ox направлена по вектору $\vec{a}$, т. е. вектор $\vec{a}$ в этой системе координат имеет координаты $(|\vec{a}|; 0; 0)$. Пусть в этой системе векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют соответственно координаты $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$.

Заметим, что если какой-либо вектор $\vec{m}$ в этой системе имеет координаты $(x; y; z)$, то $x = |\vec{m}|\cos\varphi$, где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{m}$. Значит,

$$\vec{a}\cdot\vec{m} = |\vec{a}|\cdot|\vec{m}|\cos\varphi = |\vec{a}|x.$$

Таким образом,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,x_1,\ \vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|x_2,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,(x_1 + x_2),$$

т. е.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Из свойств 3, 4 и 5 следует, что при скалярном умножении векторных величин скобки можно раскрывать по обычным правилам. В частности, если координатами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в декартовой системе координат, задаваемой векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, будут тройки $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — попарно перпендикулярные единичные векторы, то нетрудно получить формулу, выражающую скалярное произведение через координаты векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\cdot(x_1\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2\vec{i}^{\,2} + x_1y_2\,(\vec{i}\cdot\vec{j}) + \ldots + z_1z_2\vec{k}^{\,2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Зафиксируем эту формулу как ещё одно свойство.

6. $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$, где $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в декартовой системе координат.

Задачи, задания, вопросы

1. Найдите угол между векторами: а) $\vec{a}(-3; 4; 0)$ и $\vec{b}(5; 0; -12)$; б) $\vec{a}(1; 2; 3)$ и $\vec{b}(2; 3; 4)$; в) $\vec{a}(-1; -2; 3)$ и $\vec{b}$ $(1; -2; -3)$.

2 (п). Докажите, что вектор $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ перпендикулярен плоскости, задаваемой уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

3. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найдите угол между плоскостями: а) $3x - 2y + z = 3$ и $2x + y - z = 1$; б) $x + y + z + 1 = 0$ и $x - 2y - 3z = 0$.

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно: $AB = 2$, $AA_1 = 3$, $AD = 4$, $\angle BAD = 90°$, $\angle BAA_1 = 60°$, $\angle DAA_1 = 45°$. Найдите AC_1.

5 (в). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC_1 и BD_1, AB_1 и BC_1.

6. Найдите все попарные углы между диагоналями прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны 1, 2 и 3.

7. Докажите, что для любых точек A, B, C и D пространства выполняется равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

8. Дана точка $A(1; 2; 3)$. Найдите на осях координат точки K, N и M такие, что прямые KA, NA и MA попарно перпендикулярны.

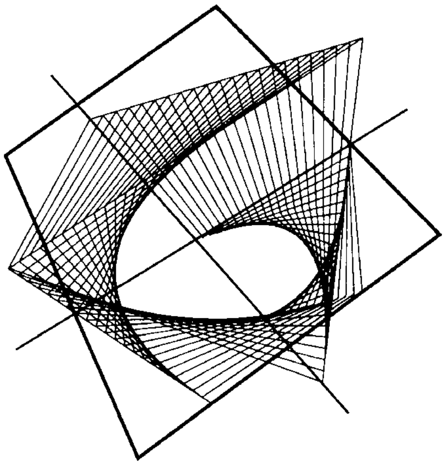
9 (тп). Из некоторой точки пространства выходят четыре луча. Докажите, что сумма косинусов всех углов между парами лучей не меньше -2.

10 (т). Докажите, что сумма косинусов двугранных углов любого тетраэдра не больше 2.

11 (т). Докажите, что все три угла между биссектрисами плоских углов трёхгранного угла одновременно либо острые, либо тупые, либо прямые.

9*

Движения пространства



Идея преобразования, или, как иногда говорят, симметрии, — одна из важнейших идей не только в геометрии, но и во всей современной математике. Многие свойства геометрических (и не только геометрических) объектов, в частности различных пространственных фигур, удобно описывать с помощью этого понятия.

Мы с вами уже сталкивались с применениями симметрий в геометрии, когда изучали в курсе планиметрии преобразования плоскости. Несложно понять, что данное тогда определение преобразования дословно можно повторить и для случая пространства (разве что слово «плоскость» надо заменить словом «пространство»).

А именно мы будем говорить, что задано ***преобразование пространства****, если указано правило, сопоставляющее любой точке A (пространства) некоторую точку A' (тоже пространства). В таком случае говорят, что точка A' — образ точки A, а точка A — прообраз точки A' относительно рассматриваемого преобразования. Иначе говоря, преобразование задано, если для каждой точки известен её образ, при этом образы разных точек разные.*

9.1. Определение движений

В конце 9 класса мы с вами уже изучали движения плоскости. Надеемся, вы не забыли данное тогда определение! Потому что, как и в случае общего понятия преобразования, определение движения пространства дословно воспроизводит аналогичное определение для плоскости, за исключением того, что слово «плоскость» надо заменить словом «пространство».

Определение 27

Движением называется такое преобразование пространства, которое сохраняет расстояние между точками, т. е. если какие-то (любые) две точки A и B в результате движения переходят в точки A' и B', то $AB = A'B'$.

Легко проверить, что любое движение переводит прямую в прямую, плоскость — в плоскость, сферу в сферу и т. п. При этом равные тела переводятся в равные.

Движения пространства, как и движения плоскости, обладают следующим важным, хотя и очевидным свойством, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 9.1

Результатом двух последовательных движений пространства является движение пространства.

Мы предлагаем вам самостоятельно проверить справедливость этого утверждения так же, как мы делали это в 9 классе.

Результат двух последовательных движений называется **композицией.**

Для многих типов движений пространства несложно отыскать «плоский аналог», который зачастую носит то же самое название. При этом оказывается, что некоторые виды движений пространства своими свойствами и даже определением полностью аналогичны соответствующим движениям плоскости. К примеру, определения **тождественного преобразования** (т. е. преобразования, оставляющего на месте все точки пространства), **параллельного переноса** или **центральной симметрии** в пространстве совпадают с аналогичными определениями для плоскости. С другой стороны, некоторые типы движений пространства не имеют аналогов на плоскости. Более того, даже обычные, знакомые нам движения, такие как **центральная**

симметрия или **симметрия относительно прямой**, приобретают в пространстве новые свойства. Приведём несколько примеров.

9.2. Вращение вокруг оси и винтовое движение

Напомним, что, когда мы определяли поворот на плоскости, нам потребовалось выбрать точку — центр поворота, вокруг которого мы собирались поворачивать плоскость.

В отличие от этого в пространстве поворачивать тела и фигуры надо не вокруг точек, а вокруг прямых.

Итак, пусть задана прямая l и угол величиной ω (при этом ω может быть как положительным, так и отрицательным числом). Мы также предполагаем, что нам задано направление прямой (на рис. 126 оно обозначено стрелочкой). Это необходимо, чтобы выбрать направление вращения. В случае плоскости направление можно было однозначно задать, указав знак угла, знак «+» соответствует вращению против часовой стрелки. В пространстве этого недостаточно: прежде чем указывать, в какую сторону направить поворот, надо выбрать направление, в котором мы смотрим на ось поворота. Ведь если смотреть в сторону, указанную стрелочкой на оси l (см. рис. 126), то поворот, обозначенный на рисунке круговой стрелочкой, будет производиться по часовой стрелке, а при взгляде в противоположную сторону тот же самый поворот будет направлен против часовой стрелки.

Мы не случайно выбрали направление оси на рисунке таким образом: в математике, физике и в других естественных науках действует общепринятая договорённость (называемая иногда в физике «правилом буравчика»), согласно которой **направление вращения вокруг оси выбирают таким образом, чтобы положительное значение угла ω соответствовало вращению по часовой стрелке, если смотреть в направлении, определяемом стрелкой на оси**.

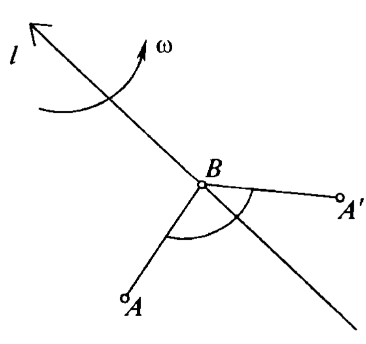


Рис. 126

Итак, дадим, наконец, формальное определение поворота вокруг оси.

Определение 28

При сделанных выше предположениях говорят, что точка A переходит в точку A' при повороте на угол ω вокруг оси l, если основания перпендикуляров, опущенных из A и A' на l, совпадают, расстояния от этих точек до прямой (т. е. длины опущенных на прямую l перпендикуляров) равны, а угол между перпендикулярами, опущенными из указанных точек на прямую l, равен ω (при этом подразумевается, что угол отсчитывается в направлении от луча AB к лучу $A'B$ и совпадает с ω как по направлению, так и по величине, см. рис. 126).

Нетрудно проверить, что вращение на любой угол вокруг любой оси является движением.

Важным обобщением поворота вокруг оси в пространстве (отсутствующим на плоскости!) является **винтовое движение**.

Определение 29

Винтовым движением называется композиция поворота вокруг оси и параллельного переноса на некоторый вектор $\vec{v}$, параллельный оси вращения.

Несложно показать, что порядок, в котором производятся эти движения (поворот и параллельный перенос), можно взять произвольный. В самом деле, пусть сначала точка A переходит в точку K при параллельном переносе на вектор $\vec{v}$, параллельный оси l. Пусть, в свою очередь, точка K переходит в A' при повороте вокруг l на угол ω. Тогда, согласно определению, точка A' является образом точки A при движении, равном композиции параллельного переноса и поворота вокруг оси, взятых в указанном порядке.

Рассмотрим точку L — образ A при повороте вокруг l на угол ω (рис. 127). Тогда очевидно, что фигура $ALMKA'N$ (см. рис. 127) — прямая треугольная призма с основаниями AML и KNA' (точка N — основание перпендикуляров, опущенных из точек K и A' на l). Из этого следует, что точка A' — образ точки L при параллельном переносе на тот же самый вектор $\vec{v}$, т. е. A' — образ точки A относительно движения, равного композиции поворота и параллельного переноса (теперь уже сначала идёт поворот, а затем — параллельный перенос!).

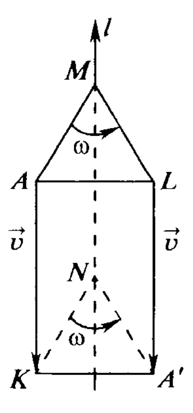


Рис. 127

То, что такое преобразование пространства называется «винтовым движением», легко объяснить. Представьте себе, что поворот вокруг оси и параллельный перенос производятся не один за другим, а одновременно. Тогда получится, что мы как бы закручиваем (или выкручиваем, в зависимости от знака ω) винт, ось которого совпадает с l.

В некотором смысле аналогом винтового движения на плоскости является скользящая симметрия. В самом деле, если угол, на который поворачивается пространство при винтовом движении, равен 180°, то все плоскости, проходящие через ось вращения, переходят сами в себя. Легко понять, что преобразование, которое таким образом получается на любой из этих плоскостей, есть не что иное, как скользящая симметрия относительно той же самой оси и с тем же самым вектором.

9.3. Центральная симметрия и симметрия относительно прямой

Дадим определение центральной симметрии пространства.

Определение 30

Центральной симметрией с центром в точке O называется движение, сопоставляющее любой точке A точку A', лежащую на прямой OA по другую сторону от точки O и так, что $OA = OA'$ (точка O при этом остаётся неподвижной).

С одной стороны, произвольная плоскость, содержащая точку O, переходит при центральной симметрии относительно O в себя, причём преобразование плоскости, которое получается таким образом, есть не что иное, как центральная симметрия относительно точки O. С другой стороны, свойства центральной сим-метрии в пространстве сильно отличаются от её свойств на плоскости. Например, в отличие от плоскости, где центральная симметрия совпадает с поворотом на угол 180° вокруг центра, центральная симметрия в пространстве не является поворотом ни для какого угла и оси. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим рисунок 128.

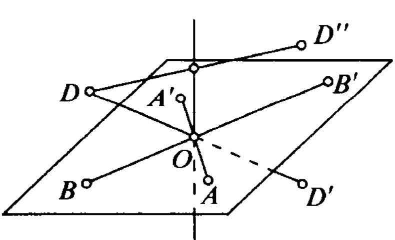


Рис. 128

Пусть точка O — центр симметрии, переводящей точку A в A', а точку B — в B'. Если бы существовала ось, поворот вокруг которой совпадал бы с центральной симметрией, то эта ось была бы перпендикулярна плоскости треугольника AOB, содержащей прямые AA' и BB', и проходила бы через точку

O. При этом угол ω должен был бы быть равен 180°. Однако поворот на 180° вокруг указанной оси l переводит точку D, не лежащую в плоскости треугольника AOB, в точку D'', лежащую по ту же сторону от этой плоскости, что и D. А центральная симметрия относительно O переводит D в точку D', лежащую по другую сторону от плоскости AOB.

Более близким аналогом центральной симметрии на плоскости в пространстве является **симметрия относительно прямой**. Её определение дословно воспроизводит соответствующее определение для плоскости. Более того, если провести произвольную плоскость через ось симметрии, то все точки этой плоскости останутся на ней же, и преобразование плоскости, которое таким образом получается, есть не что иное, как... отражение относительно прямой! Но, как несложно понять, в пространстве симметрия относительно прямой совпадает с поворотом на 180° вокруг этой же прямой.

9.4. Зеркальная симметрия и скользящие симметрии

Хотя мы и проходим зеркальную симметрию только сейчас, с ней знаком всякий, кто хоть раз причёсывался перед *зеркалом*. То, что мы рассматриваем, когда водим расчёской по волосам, — это не мы сами, а *наш зеркальный образ*, т. е. изображение нашего тела, в частности нашей головы, при симметрии относительно плоскости отражающей поверхности зеркала. И как многие, наверное, неоднократно замечали, свойства этого объекта сильно отличаются от наших: то, что у нас находится в правой руке, у нашего образа по ту сторону зеркала — в левой, и наоборот. Потому-то иногда нелегко сделать перед зеркалом даже самую простую вещь, торчащий вихор, который находится, казалось бы, справа, оказывается на самом деле слева, и т. п.

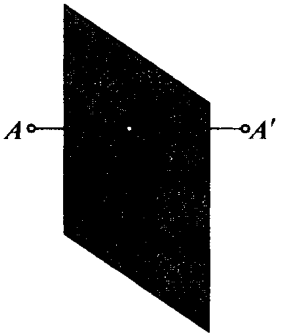


Рис. 129

Дадим теперь точное определение симметрии относительно плоскости.

Определение 31

Пусть дана плоскость π. Образом точки A при симметрии относительно плоскости π называется точка A', лежащая на продолжении перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость π, и для которой расстояние до плоскости π равно расстоянию от этой плоскости до точки A (рис. 129).

Точно так же, как и на плоскости, теперь можно определить пространственную скользящую симметрию.

Определение 32

Скользящей симметрией называется движение, представляющееся в виде композиции симметрии относительно плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный этой плоскости.

Свойства этого движения полностью аналогичны свойствам его плоского тёзки. Например, как и на плоскости, порядок преобразований в композиции параллельного переноса и симметрии можно взять любой (попробуйте доказать это самостоятельно!). Однако теперь в качестве вектора, задающего скользящую симметрию, мы можем взять любой из векторов, параллельных плоскости, и далеко не все из них параллельны друг другу!

Наконец, существует ещё один вид преобразований пространства, связанный с зеркальной симметрией.

Определение 33

Винтовая (или поворотная) симметрия — это композиция отражения относительно плоскости и поворота вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. (Как и раньше, порядок композиций безразличен.)

Понятно, что все три этих движения различаются между собой: у зеркальной симметрии есть целая плоскость, состоящая из точек, остающихся на месте; у скользящей симметрии с ненулевым вектором таких точек нет, а у винтовой — только одна (точка пересечения оси вращения с плоскостью).

Рассмотрим поподробнее свойства зеркальной симметрии. Начнём с её плоского аналога — симметрии относительно прямой.

Пусть неравнобедренный треугольник ABC переходит при симметрии относительно некоторой прямой (например, AB) в треугольник $A'B'C'$. Представим себе теперь, что треугольник ABC вырезан из картона. Можем ли мы переложить его так, чтобы точка A совпала с точкой A', B — с B', а C — с C'? Конечно, да! Надо только повернуть фигурку треугольника вокруг оси точно так же, как мы переворачиваем страницы в книге (рис. 130).

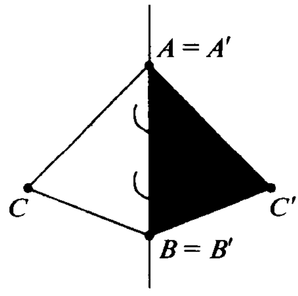


Рис. 130

А теперь представим себе, что обе стороны нашего картонного треугольника окрашены, причём в разные цвета, например в белый и чёрный. Можем ли мы так переложить нашу фигурку, чтобы не только точки совпали, но и чтобы фигурка осталась белой? Оказывается, что нет. В чём же причина неудачи? Посмотрим внимательно на рисунок 130: в чём отличие треугольника ABC от $A'B'C'$? Эти треугольники равны, но при этом между ними есть и небольшая разница: при обходе по часовой стрелке границы первого из этих треугольников точки следуют одна за другой в порядке $A—B—C$, а при таком же обходе границы второго треугольника получаем порядок $A'—C'—B'$! Но если мы не перевернём картонку, то порядок точек не изменится, поэтому совместить треугольники так, чтобы их цвет не изменился, невозможно.

Рассмотрим теперь пространственный аналог. Возьмём, например, пирамиду $ABCD$ такую, что плоскость ABD перпендикулярна плоскости ABC (рис. 131). Пусть $A'B'C'D'$ — её зеркальный образ относительно плоскости ABD. Представим себе, что у нас есть гипсовая модель тетраэдра $ABCD$. Из того, что мы только что говорили про плоскую ситуацию, следует, что невозможно совместить эту модель с тетраэдром $A'B'C'D'$ — зеркальным образом $ABCD$ так, чтобы все одноимённые точки (т. е. A и A', B и B' и т. д.) совпали. Ведь если бы это было возможно, получилось бы, что треугольник ABC можно совместить с треугольником $A'B'C'$ не переворачивая.

Итак, ***в отличие от движений плоскости, не все движения пространства можно реализовать как перекладывание моделей фигур в пространстве***. Поэтому фраза «движение переводит любое тело в равное ему», да и вообще понятие равных фигур

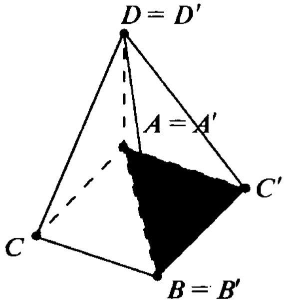


Рис. 131

в стереометрии не имеет того наглядного значения, которое можно ему придать на плоскости, — представление о непрерывном перекладывании геометрических объектов в пространстве не срабатывает. Поэтому обычно считают, что две пространственные фигуры равны, если их можно совместить каким-либо (каким угодно) движением, независимо от того, можно ли реализовать это движение в виде непрерывного перекладывания. Можно сказать, что по определению **равные пространственные фигуры — это фигуры, совмещаемые некоторым движением пространства**.

Задачи, задания, вопросы

1. Пусть $A'B'C'D'$ — образ тетраэдра $ABCD$, все рёбра которого различны, при симметрии относительно его вершины D (таким образом, точка D' совпадает с точкой D). Докажите, что тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ невозможно совместить непрерывным перекладыванием. Останется ли утверждение справедливым, если в качестве центра симметрии вместо точки D взять какую-либо другую точку?

2. Пользуясь данным определением равных пространственных фигур, убедитесь в том, что любое движение пространства переводит равные пространственные фигуры снова в равные.

3. Докажите, что порядок, в котором производятся параллельный перенос и зеркальная симметрия, появляющиеся в определении скользящей симметрии, можно взять произвольный.

4. Перечислите движения пространства, переводящие в себя: а) правильный тетраэдр; б*) куб; в*) октаэдр.

5. Рассмотрите тетраэдр $ACB'D'$, вписанный в куб $ABCDA'B'C'D'$. Какие из движений пространства, переводящих этот куб в себя, переводят в себя и данный тетраэдр?

6. Найдите плоскость, симметрия относительно которой переводит точку A в точку B, если:
а) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$;
б) $A(1; 2; 3)$, $B(4; 5; 6)$.

7. Найдите ось и угол вращения, при котором точка $A(1; 0; 0)$ переходит в $B(0; 1; 0)$, точка B — в $C(0; 0; 1)$, а точка $O(0; 0; 0)$ остаётся неподвижной.

8. Для любых ли трёх точек A, B и C в пространстве существует поворот вокруг некоторой оси, переводящий точку A в точку B, а точку C оставляющий на месте?

9.5. Разложение движений в композицию зеркальных симметрий

В этом параграфе мы докажем следующую важную теорему.

Теорема 9.2

Любое движение пространства может быть представлено в виде композиции не более чем четырёх зеркальных симметрий.

Для начала докажем вспомогательный результат.

Лемма

Любое движение пространства однозначно задаётся образом четырёх точек, не лежащих в одной плоскости.

Доказательство. Рассмотрим четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости.

Пусть точки A', B', C' и D' — их образы. Заметим, что точки A', B', C' и D' не лежат в одной плоскости, раз это так для точек A, B, C и D (в противном случае в результате движения изменилось бы расстояние от точки D до плоскости ABC). Далее, так как любое движение сохраняет расстояния между точками, то образ произвольной точки E при рассматриваемом движении лежит в пересечении сфер с радиусами AE, BE, CE и DE и с центрами в A', B', C' и D' соответственно. С одной стороны, это пересечение не пусто, так как в нём лежит точка E'. А с другой стороны, так как центры этих сфер не лежат в одной плоскости, то сферы не могут иметь более одной общей точки (докажите это утверждение самостоятельно).▼

Теперь мы можем доказать теорему 9.2.

Доказательство теоремы 9.2. Вследствие доказанного утверждения достаточно показать, что если некоторое движение переводит четыре точки A, B, C и D в точки A', B', C' и D' соответственно, то можно найти не более четырёх плоскостей, композиция симметрий относительно которых переводила бы точку A в A', B — в B' и т. д. Рассмотрим сначала плоскость, проходящую через середину отрезка AA' и перпендикулярную ему. Симметрия относительно этой плоскости переводит точку A в точку A'. Если при этом остальные точки (B, C, D и B', C', D') совместились, на этом наше доказательство закончено.

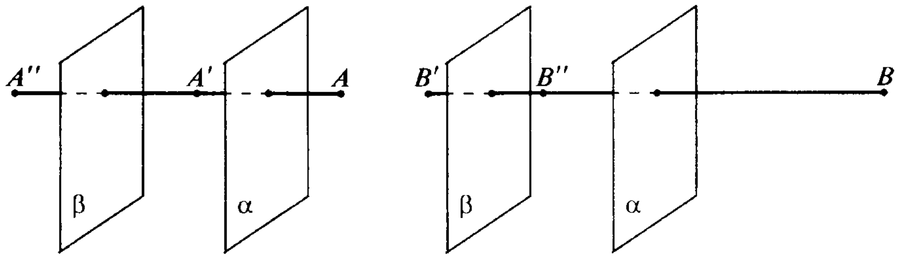
В противном случае среди оставшихся трёх точек существует точка, образ которой при рассмотренной зеркальной симметрии не совпадёт с требуемым по условию. Допустим, это точка B (в случае необходимости мы всегда сможем переименовать точки). Рассмотрим плоскость, перпендикулярную отрезку $B''B'$ (здесь B'' обозначает образ B при рассмотренной зеркальной симметрии) и проходящую через точку $A = A'$. Эта плоскость пройдёт через середину отрезка $B''B'$, потому что $AB' = AB''$. Симметрия относительно этой новой плоскости оставляет на месте точку A и переводит B'' в B'.

Аналогично предыдущему, если при композиции рассмотренных двух симметрий точка C не переходит в C', а переходит в некоторую точку C'', то мы можем рассмотреть симметрию относительно биссекторной плоскости двугранного угла, образованного плоскостями $A'B'C'$ и $A'B'C''$. Эта симметрия переводит C'' в C' и не меняет положения точек A' и B'. Наконец, если образ точки D при всех этих преобразованиях не совпал с D', то осталось применить отражение относительно плоскости $A'B'C'$.▼

Доказанная теорема позволяет описать все возможные виды движений пространства, подобно тому как это мы делали в 9 классе. Однако подробное доказательство подобного результата (даже просто перечисление всех возможных случаев взаимного расположения четырёх плоскостей) в пространстве требует гораздо больших усилий, чем на плоскости. Поэтому мы не будем его здесь приводить и ограничимся лишь рассмотрением нескольких простых случаев.

9.6. Композиция двух зеркальных симметрий

Пусть α и β — две данные плоскости. Мы должны описать движение, получающееся в результате композиции двух зеркальных симметрий: сначала относительно α, а потом — β. Как и на



а) $a < d$ *б*) $b > d$

Рис. 132

плоскости, следует отдельно рассмотреть два возможных варианта расположения наших плоскостей. (Мы советуем читателю сравнить результаты этого параграфа с описанием композиции двух осевых симметрий на плоскости, которое дано в конце 9 класса.)

Первый случай: плоскости α и β параллельны (рис. 132). Пусть для начала A — произвольная точка в пространстве, лежащая не между плоскостями α и β. Предположим также, что расстояние a от A до плоскости α меньше, чем расстояние d между плоскостями α и β (рис. 132, *а*).

При сделанных предположениях точка A', образ точки A при симметрии относительно плоскости α, будет лежать между плоскостями α и β, причём расстояние от него до плоскости β будет равно $d - a$. Пусть A'' — образ точки A' при симметрии относительно β. По определению, A'' — это образ A при движении, равном композиции рассматриваемых зеркальных симметрий. Заметим, во-первых, что точки A, A' и A'' лежат на одной прямой — на перпендикуляре, опущенном из точки A на плоскость α. Во-вторых, расстояние между точками A и A'' равно $AA' + A'A'' = 2a + 2(d - a) = 2d$. В-третьих, заметим, что точка A'' лежит на этой прямой по левую сторону от A (см. рис. 132, *а*).

Рассмотрим теперь другую точку B, лежащую на расстоянии $b > d$ от плоскости α и по правую сторону от неё (рис. 132, *б*). Тогда B' (образ B при первой из рассматриваемых симметрий) будет лежать по левую сторону от плоскости β и на расстоянии $b - d$ от неё. В этом случае расстояние между точками B и B'' (где B' — образ B относительно композиции симметрий) будет равно $BB' - B'B''' = 2b - 2(b - d) = 2d$, т. е. тому же, что и раньше, причём прямая BB'' будет параллельна AA'', а точка B'' опять лежит по левую сторону от B (см. рис. 131, *б*).

Несложно проверить, что то же самое будет выполняться и во всех остальных случаях расположения выбранных точек (между плоскостями или по левую сторону от плоскости β). Таким образом, все точки пространства перемещаются на одно и то же расстояние вдоль прямых, перпендикулярных выбранным плоскостям, и в направлении от α к β. То есть мы показали, что **композиция двух последовательных симметрий относительно параллельных плоскостей есть параллельный перенос на вектор, перпендикулярный рассматриваемым плоскостям и направленный от первой (в смысле порядка взятия композиции) из плоскостей ко второй, длина которого равна удвоенному расстоянию между плоскостями.**

Заметим, что это, в частности, означает, что композиция отражений относительно любых двух параллельных между собой плоскостей α и β, расстояние между которыми равно d, задаёт одно и то же движение пространства, независимо от того, какую пару плоскостей, удовлетворяющую данному условию, мы рассматриваем.

Второй случай: плоскости α и β пересекаются по прямой l и величина образовавшегося двугранного угла равна φ. Пусть точка A расположена так, как это показано на рисунке 133. Пусть AC — перпендикуляр, опущенный на плоскость α из точки A, A' — образ точки A при симметрии относительно плоскости α, а CB — перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую l. Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что отрезки AC и $A'C$ перпендикулярны прямой l. Треугольники ABC и $A'BC$ равны (как прямоугольные треугольники с равными катетами), а следовательно, расстояние от A до прямой l равно расстоянию до l от A'. Точно так же, расстояние от точки A' до прямой l равно расстоянию до этой прямой от точки A'', образа точки A относительно композиции симметрий. При этом основанием перпендикуляров, опущенных на прямую l из точек A' и A'', служит одна и та же точка B. Так как отрезки $C'B$ и CB перпендикулярны l (здесь C' обозначает основание перпендикуляра, опущенного на плоскость β из точки A'), то угол CBC' равен φ. Отсюда мы получаем, что в рассмотренном случае $ABA'' = \angle ABA' + \angle A'BA'' = 2(\angle A'BC + \angle A'BC') = 2\angle CBC' = 2\varphi$.

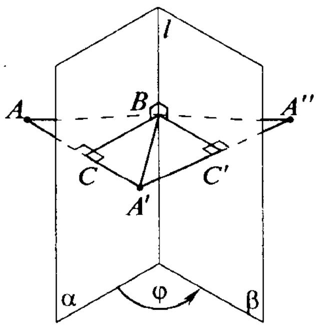


Рис. 133

Так же как и в случае параллельных плоскостей, надо рассмотреть и другие варианты расположения точки A относительно плоскостей. Делать это мы сейчас не будем, предоставляя сделать это самому читателю. Однако окончательный ответ ясен уже сейчас: **композиция двух последовательных зеркальных симметрий в пространстве относительно пересекающихся плоскостей совпадает с поворотом вокруг прямой, по которой пересекаются эти плоскости, на угол, равный удвоенной величине двугранного угла между плоскостями, направленный от первой из рассматриваемых плоскостей ко второй.**

Как и в первом случае, доказанное утверждение означает, что нам всё равно, какую пару плоскостей, пересекающихся под заданным углом по данной прямой, рассматривать. Композиция зеркальных симметрий всегда будет равна одному и тому же повороту.

9.7. Композиция двух вращений

Только что доказанное утверждение позволяет нам ответить на вопрос, чему равна композиция двух вращений вокруг пересекающихся осей.

Пусть даны две пересекающиеся прямые: l и m. Найдём композицию поворотов вокруг этих прямых на углы φ и ψ (рис. 134).

В силу только что доказанного утверждения, первый из указанных поворотов можно представить в виде композиции двух зеркальных симметрий относительно плоскостей, пересекаю-

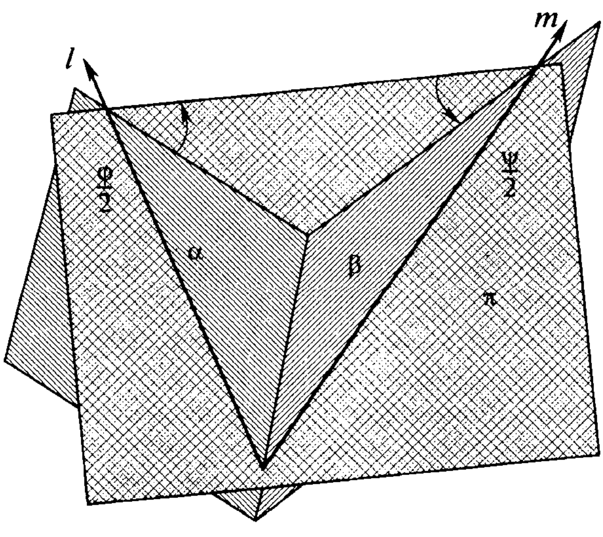


Рис. 134

щихся по прямой l под углом, равным $\frac{\varphi}{2}$ (при этом угол следует отсчитывать от первой из плоскостей ко второй). Так как такие плоскости можно выбрать произвольным образом, то можно считать, что вторая из них совпадает с плоскостью π, проходящей через прямые l и m. Точно так же второй из рассматриваемых поворотов можно представить в виде композиции двух зеркальных симметрий, первая из которых будет производиться относительно той же самой плоскости π. При этом положение второй плоскости однозначно задаётся тем условием, что она проходит через прямую m и образует угол $\frac{\psi}{2}$ с плоскостью π, если считать в направлении от π к ней (см. рис. 134).

Пусть α и β — соответственно первая из плоскостей, задающих поворот вокруг l, и вторая из плоскостей, задающих поворот вокруг m. Тогда композицию рассматриваемых вращений можно представить в виде четырёх последовательно проделанных зеркальных отражений: относительно α, затем два раза относительно π и, наконец, относительно β. Однако две симметрии относительно одной и той же плоскости подряд не меняют положения ни одной точки в пространстве. Следовательно, при взятии композиции о них можно забыть. Получилось, что композиция двух поворотов относительно пересекающихся осей равна композиции двух зеркальных симметрий относительно плоскостей α и β. Так как эти плоскости проходят через пересекающиеся прямые l и m соответственно, то они или пересекаются по некоторой прямой, проходящей через точку пересечения прямых l и m, или совпадают (и тогда совпадают с плоскостью π, единственной плоскостью, проходящей через l и m). В первом случае, согласно доказанному в предыдущем параграфе, композиция рассматриваемых симметрий равна повороту вокруг этой прямой на угол, равный удвоенному углу между α и β. А второй случай означает, что рассматриваемые углы φ и ψ были нулевыми.

Окончательно полученный результат можно сформулировать так: **композиция поворотов на ненулевые углы вокруг пересекающихся осей равна повороту на некоторый угол вокруг прямой, проходящей через точку пересечения осей**. Отметим, что, в отличие от плоского случая, найти угол этого поворота, как и положение оси, достаточно сложно.

9.8. Композиция поворотов вокруг скрещивающихся прямых

Прежде всего, рассмотрим множество векторов в пространстве. Как известно, два вектора считаются равными, если они параллельны, одинаково направлены и равны по длине. Ясно, что любое движение переводит равные векторы в равные. Поэтому при рассмотрении преобразования, задаваемого тем или иным движением на множестве векторов, можно отождествить равные векторы. Иначе говоря, можно выбрать произвольный вектор из множества равных друг другу векторов и по тому, куда он перейдёт, судить о том, во что перейдёт любой другой, равный ему вектор.

Применим этот принцип для нахождения композиции рассматриваемых поворотов. Найдём сначала преобразование, задаваемое композицией поворотов вокруг скрещивающихся прямых, на множестве векторов. Как было сказано, мы можем выбирать любой из векторов в классе равных друг другу. Например, мы можем считать, что каждый раз начало нашего вектора лежит на оси вращения! Или, что то же самое, мы можем поворачивать векторы на тот же самый угол вокруг любой оси, параллельной данной. Таким образом, преобразование, задаваемое композицией рассматриваемых вращений на множестве векторов, совпадает с преобразованием, задаваемым композицией вращений на те же самые углы вокруг любых двух других осей, параллельных данным. Например, можно рассмотреть пересекающиеся оси. Тогда, как доказано в предыдущем параграфе, композиция рассматриваемых поворотов будет равна повороту вокруг некоторой новой оси.

Рассмотрим эту ось. Векторы, параллельные направлению этой оси, переходят в равные себе. А следовательно, прямые, параллельные указанному направлению, переходят в такие же прямые.

Выберем теперь плоскость, перпендикулярную найденному направлению. Так как любое движение сохраняет все углы, векторы, параллельные этой плоскости, перейдут в векторы, параллельные той же плоскости. В силу сделанного выше отождествления векторов, можно считать, что векторы остались в той же самой плоскости. Как мы знаем, преобразование, равное композиции рассматриваемых вращений, на множестве векторов совпадает с поворотом вокруг оси. Значит, преобразование множества векторов на рассматриваемой плоскости есть не что иное, как поворот! Но преобразование плоскости, задающее поворот на множестве векторов этой плоскости, должно быть поворотом вокруг некоторой точки.

Пусть A — эта точка. Прямая l, проходящая через A перпендикулярно рассматриваемой плоскости, при рассматриваемой композиции поворотов переходит в прямую, параллельную самой себе (при этом направление векторов, направленных вдоль этой прямой, не меняется). Но при этом, в силу выбора A, пересечение l с указанной плоскостью тоже не меняется! Значит, эта прямая переходит сама в себя.

Единственное нетривиальное движение прямой, не меняющее её направление, — параллельный перенос на вектор, параллельный этой прямой (под движением прямой, как можно догадаться, мы подразумеваем преобразование прямой, сохраняющее расстояние между её точками). Учитывая этот факт и то, что преобразование, получающееся на множестве векторов в пространстве, — поворот вокруг оси, параллельной l, получаем следующее утверждение: **композиция ненулевых поворотов вокруг скрещивающихся осей является винтовым движением.**

Наконец, дадим список всех существующих видов движений пространства. Сформулируем его в виде теоремы.

***Теорема 9.3** (виды движений пространства)*

Любое движение пространства может быть однозначно представлено в одном из следующих видов: вращение вокруг некоторой оси, винтовое движение, симметрия относительно некоторой плоскости, скользящая симметрия или винтовая симметрия.

Задачи, задания, вопросы

1. Найдите, чему равна композиция двух вращений на углы φ и ψ вокруг параллельных прямых.

2 (т). Найдите композицию двух винтовых движений.

3. Докажите, что порядок, в котором берутся зеркальная симметрия и вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости симметрии, не влияет на результат композиции.

4. К какому из перечисленных в теореме 9.3 видов движений пространства относится центральная симметрия?

5. Найдите вид движения, равного композиции зеркальных симметрий относительно плоскостей:

а) $2x + 5y = 1$ и $2x + 5y = 5$;
б) $z = 0$ и $x + y = 0$;
в) $z = 0$ и $y + z = 0$;
г) $z = 0$, $x + y = 0$, снова $z = 0$ и $y + z = 0$.

6 (т). Найдите в условиях предыдущей задачи, чему равен вектор параллельного переноса (если соответствующее движение — параллельный перенос) или чему равен угол и направление оси поворота (если движение — поворот вокруг оси).

7. Существует ли движение, переводящее тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(0; 0; 0)$, $B\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{2}{3}; 0\right)$, $D\left(0; 0; \frac{2}{3}\right)$ в тетраэдр $A'B'C'D'$ с вершинами $A'(1; 1; 1)$, $B'\left(\frac{1}{3}; 1; 1\right)$, $C'\left(1; \frac{1}{3}; 1\right)$, $D'\left(1; 1; \frac{1}{3}\right)$? В случае положительного ответа опишите это движение.

8. Дайте самостоятельно определение гомотетии в пространстве. Докажите, что любая гомотетия переводит любое тело в подобное ему.

9. Докажите, что любые две несовпадающие сферы в пространстве гомотетичны. Сколько существует гомотетий, переводящих одну из них в другую?

10. Найдите центры и коэффициенты гомотетий, переводящих друг в друга сферы:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Дополнительные задачи и задачи для повторения

1. С помощью только ножниц изготовьте из бумаги фигуру, изображённую на рисунке 135.

2. Представьте, что вы случайно попали на стройку. Предложите практически удобный способ измерения диагонали кирпича. (Предполагается, что у вас есть линейка или иной инструмент, с помощью которого можно измерять длину отрезка. Необходимо обойтись одним измерением без всяких вычислений.)

3. Постройте пространственную ломаную без самопересечений из шести звеньев, проходящую через все вершины куба.

4. Расположите восемь непересекающихся тетраэдров так, чтобы любые два из них соприкасались по куску поверхности ненулевой площади.

5. Покажите, как шестью непересекающимися шарами можно закрыть точечный источник света. (Это означает, что существует сфера, возможно, достаточно большого радиуса, центр которой совпадает с местом расположения источника света, полностью изнутри не освещённая.)

6 (т). На плоскости дано изображение семи вершин некоторого шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все грани которого — четырёхугольники (рис. 136; грани обозначены так же, как в параллелепипеде). Постройте изображение восьмой вершины (A_1).

7. Какие правильные многоугольники могут являться сечением куба?

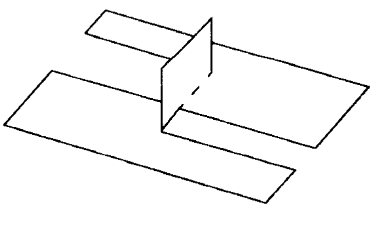


Рис. 135

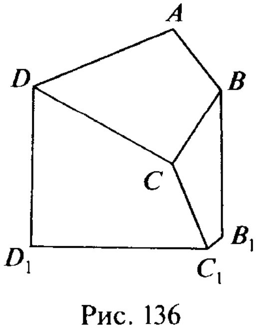


Рис. 136

8. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды, все боковые рёбра которой равны 5, а высота равна 4.

9. Найдите радиус шара, касающегося вписанной и описанной сфер правильного тетраэдра с ребром a.

10. В каком отношении делит объём правильного тетраэдра плоскость, параллельная его грани и касающаяся вписанного в него шара?

11. В каком отношении делит объём тетраэдра (произвольного) плоскость, проходящая через точки пересечения медиан трёх его граней?

12 (п). Докажите, что если в трёхгранном угле равны два плоских угла, то равны и противолежащие им двугранные углы.

13 (т). Докажите, что если в трёхгранном угле сумма двух плоских углов равна 180°, то и сумма противолежащих двугранных углов также равна 180°.

14. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с углом 60°. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

15. В каком отношении отрезок, соединяющий точки пересечения медиан оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, делится плоскостью ABC_1?

16. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, M — середина AB, N — середина SC. В каком отношении плоскость BSD делит отрезок MN?

17. Сторона основания и высота правильной шестиугольной призмы равны a. Найдите: а) объём призмы; б) радиус описанного шара; в) угол между прямой, соединяющей её противоположные вершины, и плоскостью основания.

18. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, двугранные углы при основании равны 60°. Найдите: а) объём пирамиды; б) угол между боковым ребром и основанием; в) угол между противоположными боковыми гранями; г) угол между соседними боковыми гранями; д) радиус описанной сферы; е) радиус вписанной сферы; ж) угол и расстояние между диагональю основания и прямой, соединяющей вершину пирамиды с серединой стороны основания.

19. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a. Найдите: а) объём пирамиды; б) угол между боковым ребром и основанием; в) двугранный угол при основании; г) двугранный угол между соседними боковыми гранями; д) радиус описанного шара; е) радиус вписанного шара.

20. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Двугранные углы при основании равны 60°. Найдите объём этой пирамиды, а также радиусы описанного и вписанного шаров.

21. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник. Высота пирамиды равна 1. Два двугранных угла при основании равны 60°, а один равен 120°. Найдите объём пирамиды, а также радиусы описанного и вписанного шаров.

22 (п). Докажите, что для любых точек A, B, C, D пространства отрезок, соединяющий середины AB и CD, не превосходит полусуммы BC и AD.

23. В основании четырёхугольной пирамиды лежит ромб со стороной 2. Двугранные углы при основании равны 60°. Высота пирамиды равна h. Найдите объём пирамиды (в зависимости от h).

24. Найдите радиус шара, касающегося трёх граней единичного куба и вписанного в него шара.

25. Боковая поверхность прямой призмы пересечена двумя плоскостями, образующими с её боковыми рёбрами углы α и β. Найдите отношение площадей получившихся сечений призмы. (Плоскости не пересекают оснований призмы.)

26. Найдите радиус шара, касающегося трёх граней правильного тетраэдра с ребром a и вписанного в этот тетраэдр шара.

27. В каком отношении делит объём куба плоскость, перпендикулярная его диагонали и касающаяся вписанного в него шара?

28 (т). В каком отношении делит объём куба плоскость, которая перпендикулярна его диагонали и делит эту диагональ в отношении x?

29. Основания цилиндра — окружности, вписанные в противоположные грани единичного куба. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через два противоположных ребра куба, не параллельных оси цилиндра.

30. Найдите объём цилиндра, осью которого является ребро единичного правильного тетраэдра, а боковая поверхность касается вписанного в тетраэдр шара.

31. Найдите объём конуса, осью которого является ребро единичного куба, а боковая поверхность касается вписанного в этот куб шара.

32. Ребро правильного тетраэдра равно a. Сфера касается всех его рёбер. Поверхность сферы разделена поверхностью тетраэдра на несколько частей. Найдите площадь каждой из получившихся частей.

33 (т). Одна вершина правильного тетраэдра со стороной a лежит на оси цилиндра, а остальные — на его боковой поверхности. Найдите радиус цилиндра.

34. Найдите объём цилиндра, осью которого является диагональ грани куба с ребром a, а боковая поверхность касается скрещивающейся с этой диагональю диагонали соседней боковой грани.

35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, M — точка на прямой CB_1. Найдите наименьшее значение площади треугольника A_1BM.

36. Через центр сферы радиусом R проведены три попарно перпендикулярные плоскости. Найдите радиус окружности, которая лежит на этой сфере и касается больших кругов, соответствующих проведённым плоскостям. (Другими словами, надо найти радиус окружности, вписанной в один из восьми образовавшихся на сфере криволинейных треугольников.)

37. Точки A и B расположены по одну сторону от плоскости α. Через эти точки проходит сфера, касающаяся плоскости α в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

38. Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды — прямые, а выходящие из неё рёбра равны a, b и c. Найдите радиусы описанного и вписанного шаров.

39. Объём пирамиды $ABCD$ равен V. На ребре AB взяты точки K и M так, что $KM = \frac{1}{3}AB$, а на ребре CD взяты точки P и Q так, что $PQ = \frac{1}{5}CD$. Найдите объём пирамиды $KMPQ$.

40. Найдите объём общей части двух равных треугольных пирамид объёмом V, каждая из которых симметрична другой относительно середины высоты.

41. Найдите площадь проекции правильного тетраэдра с ребром a на плоскость, которая параллельна прямой, соединяющей середины двух скрещивающихся рёбер, если одно из оставшихся рёбер образует с этой плоскостью угол α.

42. Возможна ли пирамида, у которой противоположные рёбра попарно равны, два из них имеют длину 3, два — длину 4, а два оставшихся равны 5?

43. Плоскость p проходит через гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 и образует с плоскостью треугольника угол α. Какие углы образуют с плоскостью p катеты этого треугольника?

44. Площадь основания треугольной пирамиды равна s, а площади боковых граней равны s, $2s$, $3s$. Известно, что двугранные углы при основании равны между собой. Найдите их.

45 (п). Пусть $ABCD$ — прямоугольник, M — произвольная точка пространства. Докажите, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MC^2$.

46 (т). Найдите площадь прямоугольника, если известно, что расстояния некоторой точки пространства до трёх его идущих подряд вершин равны соответственно 3, 5 и 4.

47 (т). На ребре AB единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{3}$. Через K и A_1 проведена плоскость (отличная от грани куба), касающаяся вписанного в куб шара и пересекающая ребро AD в точке M. Найдите AM.

48. Шар касается рёбер AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$. Докажите, что: а)$^{(в)}$ $AB + CD = BC + AD$; б)$^{(тп)}$ точки касания шара с рёбрами лежат в одной плоскости.

49. Имеется единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, C_1 и середину B_1C_1.

50. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прямых A_1B и B_1C взяты точки K и M так, что прямая KM параллельна AC_1. Найдите отношение $KM : AC_1$.

51. В плоскости нижнего основания цилиндра проведена прямая l, касающаяся окружности этого основания. Через l проходит плоскость, образующая угол α с плоскостью этого основания и не пересекающая верхнего основания. Найдите объём части цилиндра, лежащей ниже этой плоскости, если радиус основания цилиндра равен r.

52. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $ABC = 45°$, $\angle BCD = 90°$. Угол между прямыми AB и CD равен $60°$. Найдите AD.

53. Рассмотрим правильный тетраэдр, одно ребро которого совпадает с ребром куба, а середина противоположного ребра — с центром куба. Докажите, что в кубе можно разместить ещё два таких же тетраэдра так, что никакие два из этих трёх тетраэдров не пересекаются.

54 (т). Докажите, что в деревянном кубе можно проделать отверстие, через которое пройдёт куб такого же размера.

55. В сферу радиусом R вписан цилиндр наибольшего объёма. Чему равен его объём?

56. Найдите наибольшее значение объёма прямоугольного параллелепипеда, если периметры двух его граней равны 12 и 16.

57. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного тетраэдра в его вершины, равна нулю.

58 (т). Докажите, что сумма векторов, перпендикулярных граням многогранника, направленных во внешнюю сторону и по длине численно равных площадям соответствующих граней, равна нулю.

59 (т). Сколько существует различных правильных пирамид, у которых сторона основания равна 26, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен 15?

60 (т). В пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, ребро DB перпендикулярно плоскости ABC, двугранные углы с рёбрами AC, CD и DA равны между собой. Найдите эти углы.

61 (т). Три ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны 1, 2 и 3. Найдите радиусы всевозможных шаров, касающихся всех четырёх плоскостей, в которых лежат грани этой пирамиды.

62 (т). Найдите объём тела, получающегося при вращении правильного тетраэдра с ребром a вокруг прямой, проходящей через середины его противоположных рёбер.

63 (т). Все грани треугольной пирамиды — прямоугольные треугольники. Длина наибольшего ребра равна a, длина противоположного ребра равна b. Двугранный угол при наибольшем ребре α. Найдите объём пирамиды.

64 (т). Найдите объём параллелепипеда, три ребра которого расположены на трёх скрещивающихся диагоналях граней треугольной призмы объёмом 1.

65 (т). Шар, вписанный в тетраэдр $ABCD$, касается грани ABC в точке M. Докажите, что угол AMC равен полусумме углов пространственного четырёхугольника $ABCD$.

66 (т). Все грани тетраэдра — подобные между собой прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего ребра к наименьшему.

67 (т). Расстояние между двумя скрещивающимися и перпендикулярными прямыми равно d. Точки A и B находятся на одной из этих прямых и расположены по одну сторону от основания общего перпендикуляра на расстояниях a и b от него. Пусть M — некоторая точка на другой прямой. Найдите наибольшее значение угла AMB.

68 (т). Даны две концентрические сферы с радиусами r и R ($r < R$). Окружности оснований цилиндра лежат на этих сферах, причём одно из оснований касается меньшей сферы. Найдите высоту цилиндра.

69 (т). Через точку A на ребре двугранного угла проведена плоскость, пересекающая одну грань по лучу AB, а другую — по лучу AC. Рассмотрим две сферы, касающиеся обеих граней двугранного угла и плоскости BAC и расположенные по разные стороны от неё. Пусть K и M — точки касания этих сфер с одной из граней двугранного угла. Докажите, что $\angle BAC = \angle KAM$.

70 (т). В основании пирамиды лежит четырёхугольник, две стороны которого равны 10, а две другие равны 6. Высота пирамиды равна 7. Боковые грани образуют с плоскостью основания углы в 60°. Найдите объём пирамиды.

Проверьте свои знания

Каждое из ста приведённых ниже утверждений либо верно, либо неверно. В соответствующей клетке заранее подготовленной таблицы нужно написать «да», если вы считаете утверждение верным, и «нет», если неверным; если нет уверенности в ответе — сделайте прочерк.

Сверьте свои ответы с приведёнными в конце. За каждый правильный ответ вы получаете 1 очко, в случае неверного ответа нужно вычесть из набранной суммы 2 очка, за сделанный прочерк — 0 очков. Если набрано больше 85 очков — вы очень хорошо знаете предмет (оценка 5); 71—85 очков — знания можно оценить как хорошие (оценка 4); 46—71 очков — знания удовлетворительные (оценка 3).

На всю работу отводится три часа. Можно сделать несколько перерывов по 5—10 минут. (Время перерывов не учитывается и в сумме не должно превышать одного часа.)

1. Для любых трёх точек пространства существует единственная содержащая их плоскость.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то эти прямые являются параллельными.

3. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то эти плоскости параллельны.

4. Если тетраэдр A целиком расположен внутри тетраэдра B, то сумма длин всех рёбер тетраэдра A обязательно меньше, чем сумма длин всех рёбер тетраэдра B.

5. Две прямые, которые перпендикулярны одной и той же прямой, параллельны.

6. Если тетраэдр A целиком расположен внутри тетраэдра B, то полная поверхность тетраэдра A меньше полной поверхности тетраэдра B.

7. Если все боковые рёбра пирамиды равны между собой, то в её основании лежит многоугольник, в который можно вписать окружность.

8. Радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр, в четыре раза меньше его высоты.

9. Если два плоских угла трёхгранного угла равны 120 и 130°, то его третий плоский угол меньше 110°.

10. Существует треугольная пирамида, все грани которой — равные прямоугольные треугольники.

11. Плоскость, проходящая через середины рёбер AB и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его центр, пересекает его по правильному шестиугольнику.

12. Сечением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через его центр и середины AB и C_1B_1, является правильный шестиугольник.

13. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды перпендикулярны.

14. В любую правильную призму можно вписать шар.

15. Около правильной призмы можно описать шар.

16. Середины всех образующих конуса лежат на окружности.

17. Объём шара, описанного около куба, в $3\sqrt{3}$ раз больше объёма вписанного в него шара.

18. В результате вращения треугольника вокруг его высоты получается конус.

19. Среди всех сечений данного конуса плоскостями, проходящими через его вершину, наибольшую площадь всегда имеет осевое сечение.

20. Диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD.

21. Если радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, равен 3 см, то её объём в кубических сантиметрах выражается тем же числом, что и площадь полной поверхности в квадратных сантиметрах.

22. Расстояние от вершины куба с ребром 2 до ближайшей к ней точки вписанной в куб сферы равно $\sqrt{2} - 1$.

23. Если прямая m перпендикулярна прямой n плоскости α, то и проекцией прямой m на плоскость α также будет прямая, перпендикулярная n.

24. Сумма двугранных углов любого трёхгранного угла меньше 360°.

25. Рассмотрим две равные правильные треугольные пирамиды, одна из которых симметрична другой относительно середины высоты. Общей частью этих пирамид является параллелепипед.

26. В правильной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают.

27. Если прямая l образует равные углы со сторонами угла, лежащего в плоскости α, то её проекция на плоскость α параллельна биссектрисе этого угла.

28. Если точки A, B, A_1 и B_1 принадлежат одной сфере, а прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = A_1M \cdot MB_1$.

29. Прямая, проходящая через середины двух противоположных рёбер любой правильной треугольной пирамиды, перпендикулярна этим рёбрам.

30. Если прямые a и b являются скрещивающимися, прямые b и c также скрещивающиеся, то и прямые a и c являются скрещивающимися.

31. Диагональ куба перпендикулярна не пересекающейся с ней диагональю грани куба.

32. В правильном многограннике центры вписанной и описанной сфер совпадают.

33. Площадь проекции правильного треугольника со стороной 4 на плоскость, образующую с плоскостью треугольника угол 30°, равна 12.

34. Плоскость, проходящая через концы трёх рёбер параллелепипеда, выходящих из общей вершины (противоположные этой вершине), делит его объём в отношении 1 : 5.

35. Плоскость, проходящая через середины трёх рёбер треугольной пирамиды, делит её объём в отношении 1 : 7.

36. Если несколько прямых в пространстве попарно пересекаются, то все они принадлежат одной плоскости.

37. Все сечения, параллельные двум противоположным рёбрам данного правильного тетраэдра, имеют равные периметры.

38. Угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и её проекцией на плоскость.

39. Проекцией двух перпендикулярных прямых на плоскость является пара перпендикулярных прямых.

40. В пространстве можно построить шесть различных попарно касающихся сфер.

41. Плоскость, проходящая через середины трёх рёбер пирамиды, параллельна одной из её граней.

42. Любое изображение треугольной пирамиды имеет вид четырёхугольника с проведёнными диагоналями (одна из них пунктирная).

43. Плоскость, пересекающая шар, делит его поверхность в том же отношении, в каком она делит перпендикулярный этой плоскости диаметр шара.

44. Плоскость, проходящая через середины трёх рёбер треугольной пирамиды, параллельна, по крайней мере, двум рёбрам этой пирамиды.

45. Существует треугольная пирамида, у которой три пары противоположных рёбер равны соответственно: 3 и 3, 4 и 4, 5 и 6.

46. Если радиусы сфер равны R и r, а расстояние между их центрами равно a, то наименьшее расстояние между точками, лежащими на различных сферах, равно $|a - (R + r)|$.

47. Если у многогранника 6 граней, 12 рёбер и 8 вершин, то все его грани четырёхугольники (примером служит параллелепипед).

48. Объём прямоугольного параллелепипеда, площади боковых граней которого равны 1, 4 и 9, равен 6.

49. Существует четырёхугольная пирамида, у которой две противоположные грани перпендикулярны основанию.

50. Проекция куба на плоскость, не параллельную ни одной из его граней, имеет вид шестиугольника.

51. Отрезок длиной $\sqrt{15}$ можно так расположить в пространстве, что его проекции на три заданные попарно перпендикулярные прямые равны 1, 2 и 3.

52. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Всегда можно построить две параллельные плоскости, содержащие эти прямые.

53. В пространстве можно построить четыре попарно перпендикулярные прямые.

54. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности.

55. Объём пирамиды в три раза меньше объёма призмы с тем же основанием и той же высотой.

56. Если расстояния от концов отрезка до некоторой плоскости равны 3 и 5, то расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости равно 4.

57. Если все боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания, то в основании этой пирамиды лежит многоугольник, около которого можно описать окружность.

58. При любом a уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + az = 0$ задаёт сферу.

59. Высота правильного тетраэдра с ребром 1 равна $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

60. Косинус двугранного угла правильного тетраэдра равен $\frac{1}{4}$.

61. Если некоторая прямая образует углы α, β, γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми, то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

62. Существует невыпуклый многогранник с шестью гранями.

63. Сумма плоских углов четырёхугольной пирамиды равна 900°.

64. Проекцией некоторого угла на плоскость всегда является угол, величина которого меньше величины исходного.

65. Проекцией некоторого угла на плоскость всегда является угол, величина которого не меньше величины исходного.

66. Скалярное произведение двух векторов величина положительная.

67. Если у пирамиды равны все боковые рёбра и двугранные углы при основании, то эта пирамида правильная.

68. Радиус шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ ($ABCD$ — основание), равен радиусу окружности, описанной около треугольника ACS.

69. Если площадь основания правильной пятиугольной пирамиды равна 5, а площадь боковой грани равна 2, то двугранные углы при основании равны 60°.

70. Уравнения $2x - 3y + z - 3 = 0$ и $3x + y - 3z + 1 = 0$ задают две перпендикулярные плоскости.

71. Если боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, то центр описанной около этой пирамиды сферы лежит в плоскости её основания.

72. Расстояние между точками $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 3)$ равно 5.

73. Если высота пирамиды равна 3, двугранные углы при основании равны 60°, то её объём больше 9.

74. В результате вращения квадрата вокруг прямой, не лежащей в его плоскости, параллельной двум его противоположным сторонам и равноудалённой от этих сторон, получается боковая поверхность цилиндра.

75. Радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ ($ABCD$ — основание), равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ACS.

76. Существует правильная треугольная призма, в которую можно вписать шар радиусом 1, а площадь её основания меньше 5.

77. Если плоские углы выпуклого четырёхгранного угла в порядке обхода равны соответственно 40, 70, 80 и 50°, то существует шар, касающийся всех граней этого угла.

78. Двугранные углы при боковых рёбрах правильной четырёхугольной пирамиды тупые.

79. Существует ровно два различных пути по поверхности куба из одной его вершины в противоположную, имеющие наименьшую длину.

80. Если три шара радиусом 3 и один шар радиусом 1 попарно касаются друг друга, то существует плоскость, касающаяся всех четырёх шаров.

81. Если сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 2, а площадь боковой грани равна 4, то её объём равен $12\sqrt{3}$.

82. Существует правильная шестиугольная пирамида, у которой двугранные углы при боковых рёбрах равны 100°.

83. Если три ребра, выходящие из одной вершины треугольной пирамиды, равны 1, 2 и 3, то её объём не более 1.

84. Расстояние между двумя перпендикулярными и скрещивающимися прямыми равно 2, на одной из них взят отрезок длиной 3, а на другой — отрезок длиной 6. Тетраэдр с вершинами в концах этих отрезков имеет объём, равный 6.

85. Если на рёбрах DA, DB и DC тетраэдра $ABCD$, объём которого равен 24, взять точки K, L и M так, что $2DK = DA$, $3DL = DB$, $4DM = DC$, то объём тетраэдра $KLMD$ будет равен 1.

86. Если в данную пирамиду можно вписать шар, то её объём равен $\frac{1}{3}Sr$, где S — площадь боковой поверхности пирамиды, r — радиус вписанного шара.

87. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Объём пирамиды $ABDA_1$ в два раза меньше объёма пирамиды A_1DBC_1.

88. Если в тетраэдре $ABCD$ площади граней ABC и ACD равны, то биссекторная плоскость двугранного угла с ребром AC делит пополам ребро BD.

89. Рассмотрим все точки пространства, удалённые на расстояние не больше 1 от какой-то точки отрезка длиной 1. Объём тела, заполненного этими точками, равен π.

90. Если у цилиндра и конуса равны основания, а образующая конуса в два раза больше образующей цилиндра, то у них равны площади боковых поверхностей.

91. Объём тела, получающегося в результате вращения правильного треугольника со стороной 2 вокруг одной из его сторон, равен 2π.

92. Если все грани многогранника — равные правильные многоугольники, то такой многогранник является правильным.

93. В основании четырёхугольной пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 4 и 5. Высота пирамиды равна 3 и проходит через одну из вершин основания. Наибольший шар, который может быть помещён в такую пирамиду, имеет радиус 1 (допускается касание шара с гранью).

94. У любой треугольной пирамиды хотя бы одна высота пересекает противоположную грань во внутренней точке.

95. Отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

96. Прямые, содержащие высоты треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

97. На поверхности сферы радиусом R можно выбрать три точки A, B и C так, что $\angle ACB = \alpha$ и $\dfrac{AB}{\sin\alpha} > 2R$.

98. Можно расположить в пространстве четыре шара таким образом, что любых три шара имеют общую точку, а все четыре не имеют общей точки.

99. Для любой треугольной пирамиды существует сфера, касающаяся всех её рёбер.

100. Четыре различные прямые, каждая из которых перпендикулярна одной из граней треугольной пирамиды и проходит через центр описанной около этой грани окружности, пересекаются в одной точке.

Ответы

1	нет	21	да	41	нет	61	да	81	да
2	да	22	нет	42	нет	62	да	82	нет
3	нет	23	нет	43	да	63	нет	83	да
4	нет	24	нет	44	да	64	нет	84	да
5	нет	25	да	45	нет	65	нет	85	нет
6	да	26	нет	46	нет	66	нет	86	нет
7	нет	27	нет	47	нет	67	да	87	да
8	да	28	да	48	да	68	да	88	да
9	да	29	нет	49	да	69	да	89	нет
10	нет	30	нет	50	да	70	да	90	да
11	нет	31	да	51	нет	71	нет	91	да
12	да	32	да	52	да	72	нет	92	нет
13	да	33	нет	53	нет	73	да	93	да
14	нет	34	да	54	нет	74	нет	94	нет
15	да	35	нет	55	да	75	нет	95	да
16	да	36	нет	56	нет	76	нет	96	нет
17	да	37	да	57	да	77	да	97	нет
18	нет	38	нет	58	да	78	да	98	да
19	нет	39	нет	59	да	79	нет	99	нет
20	да	40	да	60	нет	80	да	100	да

Вместо послесловия

> Что создадим мы впредь, на это власть Господня,
> Но что мы создали, то с нами посегодня.
>
> *Н. Гумилёв*

> Нам не дано предугадать,
> Как слово наше отзовётся...
>
> *Ф. Тютчев*

Геометрия — одна из самых, а быть может, и самая древняя наука, её возраст исчисляется тысячелетиями. Но несмотря на это, геометрия и сейчас продолжает бурно развиваться. При этом удивительные открытия делаются буквально на всех этажах большого здания геометрии. Геометрия — вечно молодая наука. Её уникальность проявляется также и в том, что некоторые самые современные достижения геометрической науки могут быть доступно объяснены школьникам. Расскажем об одном из них.

Всякий, кто занимался изготовлением многогранников по их развёрткам, мог заметить, что получающиеся в результате модели обладают «жёсткостью». Во всяком случае, это свойство характерно для выпуклых многогранников. Но прежде чем пояснить, что мы понимаем под «жёсткостью» многогранника, несколько слов о плоских многоугольниках.

Только один многоугольник, а именно треугольник, полностью определяется своими сторонами. Если мы изготовим многоугольник со сторонами из твёрдых стержней, соединённых друг с другом шарнирами, то полученный многоугольник (если это не треугольник) не будет жёстким, его форма может меняться.

А как обстоит дело с многогранниками? Определяется ли он набором своих граней и указанием, как эти грани соединены друг с другом?

Рассмотрим, например, октаэдр. Поверхность октаэдра состоит из восьми правильных треугольников. Представим себе, что эти треугольники изготовлены из какого-нибудь достаточно жёсткого материала (картон, жесть или что-то подобное). Начнём из отдельных таких треугольников изготовлять поверхность октаэдра, соединяя их друг с другом не жёстко (посредством шарниров, клейкой ленты или как-то иначе). Угол между двумя отдельно взятыми треугольниками может меняться, хотя они и соединены друг с другом. Если мы таким образом изготовим поверхность всего октаэдра, то получим жёсткую конструкцию. Ещё в глубокой древности учёные заметили, что свойством жёсткости обладают все известные им выпуклые (да и невыпуклые) многогранники. Но практические наблюдения — это ещё не теорема. И лишь в начале XIX в. великий французский математик Огюст Коши доказал теорему о жёсткости (в указанном нами смысле) любых выпуклых многогранников.

Многие учёные полагали, что подобная теорема справедлива и для невыпуклых многогранников. Надо лишь приложить ещё немного усилий и...

Прошло ещё полтора века, и в 1977 г., т. е. совсем недавно с точки зрения возраста геометрии, американский математик Конелли построил невыпуклый многогранник, который оказался нежёстким (его называют «изгибаемым»). Этот многогранник может менять форму, хотя его грани при этом не меняются. Убедиться в этом можно, изготовив модель такого многогранника.

И, как говорится, лиха беда — начало. После Конелли было построено много моделей изгибаемых многогранников.

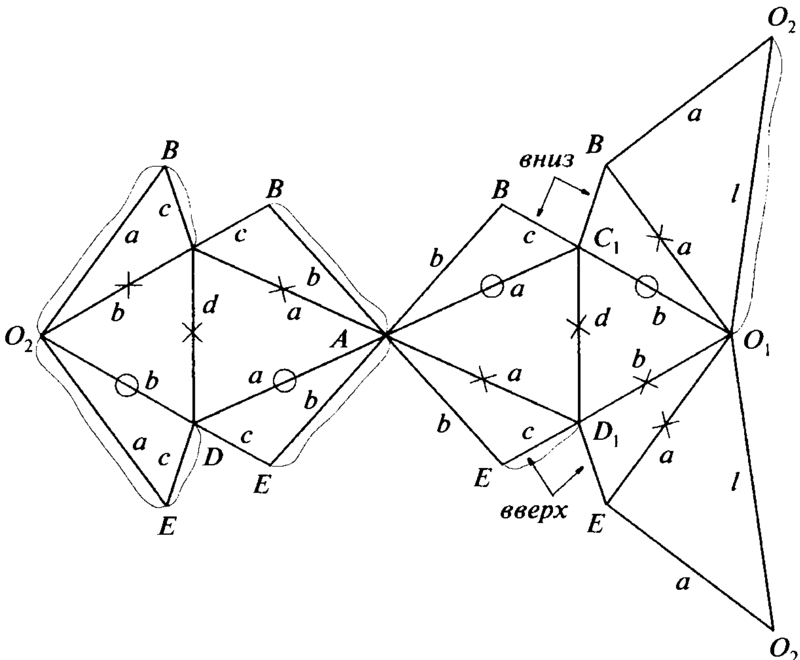
На рисунках 137, *а* и *б* изображены две развёртки одного и того же изгибаемого многогранника. Одна из них более симметрична, но требует склейки 9 граней. Для другой придётся склеить 8 граней. Из всех известных изгибаемых многогранников многогранник, развёртка которого дана на рисунках, имеет наименьшее число граней — 14. Попробуйте склеить, используя приведённую ниже инструкцию, по этим развёрткам многогранник.

1. Перерисуйте развёртку на лист плотной бумаги (с помощью кальки или иным способом). Можете изменить размеры, сохранив пропорции, указанные на рисунке. Например, можно взять $a = 12 \cdot 0{,}5 = 6$ (см), $b = 5$ см, $c = 2{,}5$ см, $d = 5{,}5$ см, $l = 8{,}5$ см.

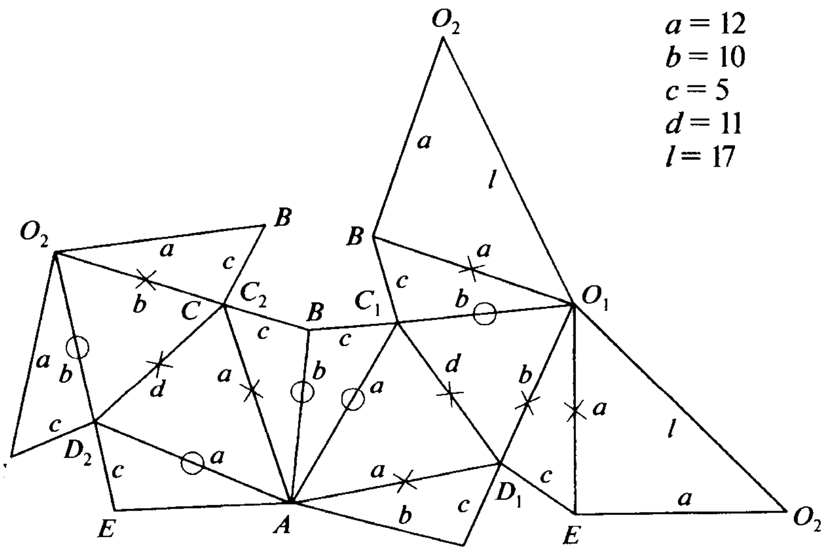
2. Вырежьте развёртку по периметру. При этом для каждой пары склеиваемых сторон (их концы обозначены одинаковыми буквами) следует немного отступить от одной из сторон, чтобы образовалась небольшая полоска для склейки.

3. По каждому отрезку (ребру будущего многогранника) проведите несколько раз тупой стороной ножа или ножниц и перегните её несколько раз в обе стороны. Надо, чтобы прилегающие к каждому ребру две грани свободно «крутились».

4. Если ребро отмечено крестиком (+), то соответствующие грани надо сгибать на себя от листа бумаги. Если же оно отмечено кружочком (○), то сгибать их надо от себя. В результате вершины C_2 и D_2 должны оказаться «в глубине» многогранника.


B
B
B
B
O2
O2
O2
O1
A
C1
D
D1
E
E
E
E
вниз
вверх
a
b
c
d
l

а)


a = 12
b = 10
c = 5
d = 11
l = 17
O2
O2
O2
O1
B
B
B
C
C1
C2
D1
D2
A
E
E
E
a
b
c
d
l

б)

Рис. 137

Лучше всего самому склеить одну-две модели. Возможно, требуемый многогранник получится не сразу. Дело в том, что из каждой развёртки можно получить различные многогранники, в том числе и неизгибаемые. Попробуйте из предложенных развёрток склеить несколько различных моделей. Это интересно и поучительно.

Вскоре было обнаружено интересное свойство всех полученных изгибаемых многогранников: в процессе изгибания у них не менялся объём. Итак, перед математиками встала новая проблема: верно ли это свойство постоянства объёма для любых изгибаемых многогранников? Её назвали «проблемой кузнечных мехов». Откуда такое название? Если бы существовал изгибаемый многогранник, который в процессе изгибания изменял бы свой объём, то, изготовив модель его поверхности с шарнирно соединёнными гранями из жёсткого материала и проделав где-то на поверхности небольшое отверстие, мы получили бы что-то вроде кузнечных мехов: через указанное отверстие в процессе изгибания проходил бы поток воздуха то в одном, то в другом направлении. Эту проблему с блеском решил московский математик И. Х. Сабитов, который доказал, что свойство постоянства объёма характерно для любых изгибаемых многогранников. В процессе доказательства он получил формулу, выражающую объём многогранника, которую можно назвать *обобщением формулы Герона*. В каком-то смысле современная геометрия вернулась к своим истокам.

Любая решённая проблема в геометрии порождает ряд новых, требующих своего решения. Что будет дальше, мы не знаем. Быть может, в этот момент какой-нибудь убелённый сединами учёный завершает доказательство очередной удивительной теоремы о свойствах изгибаемых многогранников. А возможно, кому-то из вас, только заканчивающих школу, — ведь геометрии все возрасты покорны, — удастся в ближайшем будущем вписать очередную строку в славную историю геометрии...

Нам не дано предугадать...

Нам не дано...

Автор

Ответы и указания

10 класс

Введение

1. Сложите из спичек каркас куба. **3.** Число рёбер может быть равным 9 или 8. **7.** Существует. Возьмём шестиугольную призму и проведём через бóльшую диагональ одного из оснований плоскость, не пересекающую другого основания. Один из образовавшихся многогранников имеет 19 рёбер и даёт нужный пример. **9.** Возможен. Рассмотрим треугольную пирамиду, возьмём на одном из её рёбер две точки и проведём через них две плоскости. Эти плоскости «вырежут» из данной пирамиды некую треугольную пирамиду. Оставшийся многогранник имеет шесть граней, четыре из которых треугольники, а две — шестиугольники. **10.** Возможно. Возьмите многогранник и проделайте несколько раз операцию, описанную в задаче 9.

1.1 **2.** 1, 4, бесконечно много.

1.2 **5.** Плоскость, параллельная α и проходящая через середину одного из (любого) отрезка AM. **6.** Плоскость, параллельная данным и проходящая через середину одного из рассматриваемых отрезков. **11.** 90°. **12.** 1 : 2. **13.** 1 : 2. **14.** 1 : 3. **15.** 2 : 5. **17.** Не может. **18.** 1 : 3. **20.** $\frac{3}{2}$.

1.3 **1.** Наименьшему из углов α и $180° - \alpha$. **3.** 60°. **4.** $\arcsin\frac{4}{5}$. **5.** 90°. **6.** 60°.

1.4 **4.** $\sqrt{3}$. **5.** $\sqrt{\frac{11}{8}}$. **8.** 2 или 1. **9.** Возможны четыре ответа: 6, $\frac{8}{3}$, 2, $\frac{4}{3}$. **11.** Возможны следующие значения: 3, 1, 9, 7. **14.** 1.

1.5 **3.** $\sqrt{b^2 - a^2}$. **6.** 3. **9.** $4 \pm \sqrt{7}$. **10.** r. **12.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **15.** $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **16.** $\arccos\frac{1}{6}$ и $\arccos\frac{2}{3}$.

1.6 **1.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **2.** $d\cos\alpha$. **3.** $\frac{a}{b\sqrt{3}}$. **5.** Окружность. **6.** Прямая, перпендикулярная П и проходящая через центр описанной около ABC окружности. **7.** $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **8.** 30°. **9.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

1.7 **1.** $a\sin\alpha$. **2.** Нет. **3.** $a\operatorname{ctg}\alpha$. **5.** 90°. **6.** Меньший из углов α и $\pi-\alpha$. **7.** $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$. **8.** $\frac{30\sqrt{6}}{7}$. **9.** $d\cos\alpha$ или $\frac{d}{3}\cos\alpha$. **10.** $\frac{\pi}{6}$. **11.** $\frac{Q^2}{S}$. **12.** $\arccos\frac{1}{3}$. **13.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}}$ и $2\arcsin\frac{b}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **16.** $\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2-1}$. **17.** 60°. **18.** Три угла по 90°, два — по 60° и один — 45°. **19.** $\frac{1}{2}(\sqrt{S^2+8Q^2}-S)$. **20.** $\cos\alpha=\frac{S_1}{Q}$, $\cos\beta=\frac{S_2}{Q}$, $\cos\gamma=\frac{S_3}{Q}$.

2.2 **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{ab}{a+b}$.

2.3 **1.** 5, 99.

2.4 **1.** 720°. **2.** α, 90°, 90°. **3.** 60°. **4.** а) от 30 до 170°; б) от 20 до 80°. **5.** 4. **7.** 12. **9.** 110°, 25°, 45°. **10.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **13.** Нет. **14.** $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ и $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$. **17.** Нет. Примером может служить трёхгранный угол, у которого два плоских угла прямые, а третий достаточно мал. **20.** 3600°.

2.5 **1.** $\sqrt{b^2-h^2}$. **2.** $\arccos\frac{1}{3}$. **3.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **4.** Три: треугольная, четырёхугольная и пятиугольная. **6.** $\sqrt{l^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$. **8.** 6. **9.** 2. **10.** 99^2. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** 3; $k=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2n}}$, где $n=3, 4, \ldots$. **13.** $S\cos\alpha$. **14.** $3\sqrt{3}\,h^2\operatorname{ctg}^2\alpha$ или $\frac{\sqrt{3}}{3}h^2\operatorname{ctg}^2\alpha$. **15.** 1, 6, 2, 3. **16.** $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$, $\arccos\frac{2b^2-a^2}{4b^2-a^2}$. **17.** $\frac{5}{3}a$. **18.** Получившийся многогранник — куб. **19.** $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)$. **20.** $\frac{2}{3}$. **21.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}(S^2+Q^2)}$. **22.** $\arccos\frac{S}{nQ}$. **23.** 2 : 1. **24.** 2 : $\sqrt{3}$. **25.** Одну. **26.** Да. **28.** $30°<\angle BSC<70°$, $60°<\angle BSD<90°$. **30.** $\frac{ab}{4}$. **31.** $\frac{a^2}{2}$. **32.** 60° или 36°. **33.** $2\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

2.6 **3.** а) Пирамида; б) призма. **4.** $\sqrt{3}$. **6.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **7.** $2\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$, $2\operatorname{arctg}\frac{3}{2\sqrt{5}}$, $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{5}$. **8.** $\sqrt{14}$. **9.** $\sqrt{5}$. **11.** Для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$

нужный пример дают пирамиды $ABCC_1$ и $DD_1A_1B_1$. **13.** $\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2+p^2)}$. **15.** 1 : 2. **18.** а) от $\frac{ah}{a+h\sqrt{2}}$ до $\frac{ah}{a+h}$; б) $\frac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})h}$. **19.** а) $2\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $2\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}$ и $2\operatorname{arctg}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{или } \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$; б) $\arccos\frac{b^2-a^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2)}}$; в) $\arccos\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}$. **20.** $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+c^2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2+\frac{c^2}{4}}+\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}}$. **21.** а) A и C_1; б) две точки, делящие AC_1 на три равные части. **22.** $4\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{2}{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **26.** $\frac{h}{3}$ и $\frac{2h}{3}$. **27.** Общей частью пирамид будет параллелепипед, а площадь его поверхности равна $\frac{4}{3}S$. **28.** Если $a^2+b^2 \geqslant c^2$, возможны два ответа: b и c; в остальных случаях ответ один: b. **30.** $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

3.2 **1.** $\sqrt{l^2-h^2}$, $h\sqrt{l^2-h^2}$. **3.** 120°. **4.** 5π. **5.** $\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. **6.** $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}$. **7.** $4\sqrt{3}\,\pi$. **8.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **9.** $\frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$. **10.** $a(\sqrt{4h^2-a^2}-2h)$. **11.** $a(\sqrt{4h^2+a^2}-h)$. **13.** 150°. **14.** $r\sqrt{4h^2+\pi^2r^2}$.

3.3 **1.** 2,8 или 14. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3}$. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** Две окружности по разные стороны от плоскости. **5.** Прямая, параллельная ребру двугранного угла и принадлежащая его биссекторной плоскости. **6.** Две окружности радиусом $2\sqrt{Rr}$ и окружность радиусом $2\sqrt{Rr}\frac{R}{R+r}$. **8.** а) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$. **9.** а) 2; б) 8; в) если $x<\frac{11}{4}\sqrt{3}$, то плоскостей 8, если $x=\frac{11}{4}\sqrt{3}$, то плоскостей 5; если $x>\frac{11}{4}\sqrt{3}$, то плоскостей 2; г) 6.

3.4 **1.** $a\frac{\sqrt{6}}{4}$, $a\frac{\sqrt{6}}{12}$. **2.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **4.** а) 1) $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-2a^2}}$, 2) $\frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, 3) $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$;

б) 1) $\frac{a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}}{a+\sqrt{4b^2-a^2}}$, 2) $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{a\sqrt{3}+3\sqrt{4b^2-a^2}}$, 3) $\frac{a\sqrt{3(b^2-a^2)}}{a\sqrt{3}+\sqrt{4b^2-a^2}}$;

в) 1) $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$, 2) $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, 3) $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$; г) 1) $\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$;

2) $\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, 3) $\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$; д) 1) $a\frac{\sqrt{2b^2-a^2}}{a\sqrt{2}+2b}$, 2) $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{a\sqrt{3}+3b}$, 3) $a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$.

5. $\frac{hr}{r+\sqrt{h^2+r^2}}$, $\frac{r}{h}(\sqrt{h^2+r^2}-r)$. **6.** $2-\sqrt{2}$. **7.** $\frac{1}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}}$. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $4S$. **10.** Если $0 \leqslant a < 1$, то $\frac{\sqrt{6-2a^2}\pm 2a}{3}$; если $a = 1$, то $\frac{4}{3}$; если $1 < a \leqslant \sqrt{3}$, то $\frac{2a \pm \sqrt{6-2a^2}}{3}$. **11.** $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-h^2}$. **12.** $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+h^2}$. **13.** $\frac{a}{2}$.

14. $\frac{rh\sqrt{2}}{h+r\sqrt{2}}$. **15.** $\frac{1}{2}R(\sqrt{3}-1)$ или $\frac{1}{2}R(\sqrt{3}+1)$. **16.** $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **17.** $\frac{1}{4}$.

18. $R\left(\frac{\sqrt{6}}{2};1\right)$. **19.** $2-\sqrt{3}$. **21.** $\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)$. **22.** $\frac{1}{2}(x+y-z)$. **23.** $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$.

25. $\frac{l}{2\sqrt{\cos\alpha}}$.

4.1 **1.** $\arccos(-\cos^2\alpha)$. **2.** Все пять шаров имеют равные радиусы $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}a$. **3.** $\frac{a}{2(\sqrt{6}+1)}$. **4.** $\sin\alpha+\cos\alpha$. **5.** $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. **6.** $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{15}}a$.

4.2 **1.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **2.** 2 : 3. **3.** 120°. **4.** 1 : 3.

4.3 **1.** а) 90°, $\frac{1}{\sqrt{6}}$, 1 : 1 и 1 : 2; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$; 7 : 2 (от вершины A), основание общего перпендикуляра находится на продолжении CM за точку M на расстоянии, равном $\frac{1}{9}CM$; в) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$; 2 : 7 (от вершины A), 8 : 1 (от вершины C); г) 45°, $\frac{1}{3}$; 4 : 1 (от вершины A), 8 : 1 (от вершины D); д) $\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 11 : 15 (от вершины A), 6 : 7 (от вершины D).

2. а) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{11}}$; 3 : 8 (от вершины A), 1 : 10 (от точки M); б) $\arccos \frac{1}{6}$, $\sqrt{\frac{2}{35}}$; 18 : 17 (от точки C), 32 : 3 (от точки D); в) $\arccos \frac{2}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 3 : 2 (от точки C), 3 : 2 (от точки B). **3.** $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. **4.** $\arcsin \frac{\sqrt{H^2+R^2}\sqrt{h^2+R^2}}{R\sqrt{H^2+h^2+R^2}}$, $\frac{(H+h)R}{\sqrt{H^2+h^2+R^2}}$.

4.5 **1.** 1. **2.** $\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **3.** $2b\sin 2\alpha$. Задача имеет смысл, если $\alpha < \frac{\pi}{4}$. **4.** $2\sqrt{3}$. **5.** $\sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}$. **6.** $\sqrt{(a^2+b^2)+2ab\sin\alpha}$, если $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$ и $a+b$, если $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

4.6 $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8}}$, $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+bc^2+c^2a^2}}$.

4.7 **1.** $\frac{R}{3}$. **2.** $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **3.** $a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **4.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **5.** При $0 < r < \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ и $r > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ существует всего восемь касающихся шаров с радиусами $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{2r}$ (по четыре); при $r = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ будет четыре шара радиусом $\frac{1}{r}$ и три радиусом $\frac{1}{2r}$, а при $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ будет два шара радиусом $\frac{1}{r}$ и четыре радиусом $\frac{1}{2r}$; при $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} < r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ будет четыре шара радиусом $\frac{1}{r}$ и два радиусом $\frac{1}{2r}$; при $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ по два шара радиусом $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{2r}$; при $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4} < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ четыре шара радиусом $\frac{1}{2r}$; при $r = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ — три шара радиусом $\frac{1}{2r}$; при $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} < r < \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ — два шара радиусом $\frac{1}{2r}$; при $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ задача не имеет решения. **6.** $\frac{\sqrt{21}\pm 3}{4}R$.

7. $2+\sqrt{3}$. **8.** 8. **10.** Можно. Например, следующим образом: рассмотрим куб $3\times3\times3$, составленный из 27 единичных кубиков. Возьмём центральный единичный куб и построим шар, касающийся всех его рёбер. Такие же шары построим для каждого из 12 единичных кубиков, имеющих общее ребро с центральным кубом.

11 класс

5.3 **1.** $\sqrt{PQL}$. **2.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. **3.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$. **4.** $\sqrt{6}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 102. **7.** 4; 6; 8. **8.** 2; 4. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. **11.** $\frac{9}{2}$. **12.** 36. **13.** 80. **14.** а) 8; б) 96; в) 384. **15.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **16.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

5.4 **1.** $\frac{7}{27}$. **2.** $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{2\pi}}$. **3.** $1 : \sqrt[3]{2}-1$. **4.** $\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{3}}$.

5.5 **1.** $a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$. **2.** $\frac{V}{6}$, $\frac{V}{3}$, $\frac{V}{6}$, $\frac{V}{6}$. **3.** $\frac{1}{6}abc$. **4.** $\frac{12}{\sqrt{61}}$. **5.** $\frac{3}{2}$. **6.** 1. **8.** *Для треугольной пирамиды:* $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$; $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(R\cdot\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}\right)$; $\frac{a^4r\sqrt{3}}{6(a^2-12r^2)}$; $\frac{a}{24}\sqrt{48Q^4-a^4}$; $\frac{\sqrt{3}}{4}h(b^2-h^2)$; $\frac{b^4(4R^2-b^2)\sqrt{3}}{32R^3}$; $\frac{1}{6}(b^2\pm\sqrt{b^4-4Q^2})\sqrt{b^2\mp2\sqrt{b^2-4Q^2}}$. Два ответа, если $2Q<b^2<\frac{4}{\sqrt{3}}Q$; $\frac{\sqrt{3}}{4}h^2(2R-h)$; $\frac{r^2h^2\sqrt{3}}{h-2r}$; $\frac{h}{2}(\sqrt{3h^4+4Q^2}-h^2\sqrt{3})$; $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2h$. Здесь $x^2=Rr+r^2\cdot r\sqrt{R^2-2Rr-3r^2}$; при этом если $0<r<\frac{\sqrt{5}-1}{4}R$, то $h=R\cdot\sqrt{R^2-2x^2}$; если $\frac{\sqrt{5}-1}{4}R\leqslant r\leqslant\frac{R}{3}$, то $h=R+\sqrt{R^2-2x^2}$. *Для четырёхугольной пирамиды:* $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}\sqrt{2b^2-a^2}$; $\frac{1}{3}a^2h$; $\frac{2}{3}h(b^2-h^2)$; $\frac{a^2}{3}\left(R\pm\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}\right)$; $\frac{b^4(4R^2-b^2)}{12R^3}$; $\frac{2}{3}h^2(2R-h)$; $\frac{2a^4r}{3(a^2-4r^2)}$; $\frac{a}{6}\sqrt{16Q^2-a^2}$; $\frac{2}{3}(b^2-\sqrt{b^4-4Q^2})\cdot\sqrt[4]{b^4-4Q^2}$; $\frac{2}{3}h(\sqrt{h^4+4Q^2}-h^2)$;

$\frac{4h^2r^2}{3(h-2r)}$; $\frac{4}{3}x^2h$. Здесь $x^2 = Rr \cdot r\sqrt{R^2-2Rr-r^2}$; при этом если $0<r<\frac{\sqrt{3}-1}{4}R$, то $h = R\cdot\sqrt{R^2-x^2}$; если $\frac{\sqrt{3}-1}{4}R \leqslant r \leqslant (\sqrt{2}-1)R$, то $h = R+\sqrt{R^2-x^2}$. **9.** $\frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{1+2\cos\alpha}$; $\frac{b^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$;

$\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos\alpha}$; $\frac{8R^3}{9\sqrt{3}}(1+2\cos\alpha)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $\frac{8r^3\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)}$;

$\frac{Q^{\frac{3}{2}}}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2(1+2\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$; $\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\beta$; $\frac{b^3}{4}\sqrt{3}\cos^2\beta\sin\beta$; $\frac{1}{4}h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\beta$;

$\frac{1}{2}R^3\sqrt{3}\sin^2 2\beta\sin^2\beta$; $\frac{r^3\sqrt{3}}{4}\operatorname{ctg}^2\beta(1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1})^3$; $\frac{Q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3}}\sin\gamma\sqrt{\cos\gamma}$; $\frac{a^3}{24}\operatorname{tg}\gamma$;

$\frac{b^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}{(\operatorname{tg}^2\gamma+4)^{\frac{3}{2}}}$; $h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\gamma$; $\frac{8R^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\gamma}{(1+4\operatorname{ctg}^2\gamma)^3}$; $\frac{r^3\sqrt{3}(1+\cos\gamma)^3}{\cos\gamma\sin^2\gamma}$; $\frac{2Q^{\frac{3}{2}}\sqrt{\operatorname{ctg}\beta}}{\sqrt[4]{3(4+\operatorname{ctg}^2\beta)^3}}$;

$\frac{a^3\cos\frac{\varphi}{2}}{12\sqrt{1-2\cos\varphi}}$; $\frac{b^3(1-2\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}}{12\sin^3\frac{\varphi}{2}}$; $\frac{h^3\sqrt{3}(1-2\cos\varphi)}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$;

$\frac{2R^3\sqrt{3}\cos^4\frac{\varphi}{2}(1-(2)\cos\varphi)}{27\sin^6\frac{\varphi}{2}}$; $\frac{r^3\sqrt{3}(\sqrt{1-2\cos\varphi}+\sqrt{3})^3}{4\sqrt{1-2\cos\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2}}$;

$\frac{2}{3}Q^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt[4]{1-2\cos\varphi}$. **10.** $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$; $\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$;

$\frac{32}{3}R^3\cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $8\frac{\sqrt{2}}{3}r^3\frac{\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$; $\frac{4\sqrt{2}}{3}Q^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\beta$;

$\frac{2}{3}b^3\cos^2\beta\sin\beta$; $\frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\beta$; $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta$; $\frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^2\beta(1+\sqrt{2\operatorname{tg}^2\beta+1})^3$;

$\frac{4\sqrt{2}}{3}Q^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\beta}}{\sqrt[4]{(2+\operatorname{ctg}^2\beta)^3}}$; $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\gamma$; $\frac{4b^3\operatorname{tg}\gamma}{3\sqrt{(\operatorname{tg}^2\gamma+2)^3}}$; $\frac{4}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\gamma$; $\frac{32R^3\operatorname{ctg}^2\gamma}{3(1+2\operatorname{ctg}^2\gamma)^3}$;

$\dfrac{4r^3(1+\cos\gamma)^3}{3\cos\gamma\sin^2\gamma}$; $\dfrac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}\sin\gamma\sqrt{\cos\gamma}$; $\dfrac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{-\cos\varphi}}$; $\dfrac{2b^3(-\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}}{3\sin^3\frac{\varphi}{2}}$; $\dfrac{2}{3}h^3\dfrac{(-\cos\varphi)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$;

$\dfrac{16R^3\cos^4\frac{\varphi}{2}(-\cos\varphi)}{3\sin^6\frac{\varphi}{2}}$; $\dfrac{2r^3(1+\sqrt{-\cos\varphi})^3}{3\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}$; $\dfrac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt[4]{-\cos\varphi}$. **11.** $\frac{1}{6}$.

12. а) 5 : 1; б) 119 : 9. **13.** $4\frac{1}{2}$. **14.** Не существует. **15.** $\frac{13}{27}$.

$\boxed{5.6}$ **1.** $\frac{1}{3}\sqrt{2SPQ}$. **2.** $\frac{1}{6}abd$. **3.** $\frac{153\sqrt{35}}{34}$. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$. **5.** $\frac{V}{30}, \frac{7V}{40}, \frac{23V}{180}, \frac{V}{10}, \frac{V}{24}$.

6. $\frac{41}{45}$. **7.** $\frac{1}{27}$. **8.** $\dfrac{6}{9+\sqrt{13}+2\sqrt{10}}$. **9.** $\frac{1}{72}$. **10.** $\alpha\beta V$. **11.** $\frac{V}{15}$. **12.** $\frac{2}{15}V$, $\frac{1}{60}V$,

$\frac{3}{10}V$, $\frac{1}{24}V$, $\frac{23}{120}V$. **13.** $\frac{a^2h\sqrt{3}}{3}$. **14.** $3r$, $r \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **15.** $\frac{1}{6}bh(c+2a)$.

16. $\frac{2}{3}a^2h\sqrt{3}$. **17.** $\frac{119}{360}$.

$\boxed{5.7}$ **2.** $\dfrac{2PQ\cos\frac{\alpha}{2}}{P+Q}$. **3.** $\arcsin\sqrt{\frac{14}{15}}$. **4.** $\arcsin\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}$. **5.** 2 : 1.

6. $\dfrac{\sqrt{2SPQ}}{S+P+Q+\sqrt{S^2+P^2+Q^2}}$; $\dfrac{\sqrt{2SPQ}}{(S+P+Q)-\sqrt{S^2+P^2+Q^2}}$. **7.** 18 : 17.

8. 4 : 9. **9.** 5 : 3. **11.** 1. **12.** $R\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}$.

$\boxed{6.2}$ **1.** $\pi d^2l + \frac{4}{3}\pi d^3$. **2.** $\frac{\pi}{12}\sin 2\alpha$. **3.** $\frac{7}{3}\pi$. **4.** $\pi ab(a+b)$. **5.** $\frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

6. $2a^2r + 2\pi ar^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$. **7.** $a^3 + 6a^2d + 3\pi ad^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$. **10.** $\frac{1}{12}\pi a^2h\cos\alpha$.

11. $\frac{1}{6}\pi h^3$. **12.** $\frac{8}{3}r^3$. **14.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

$\boxed{6.3}$ **1.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **2.** $2\pi R\left(h+\frac{1}{2}\sqrt{h^2+4R^2}\right)$. **3.** $2\pi\cos\frac{\alpha}{2}$ и $2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$. **4.** У куба.

6. $2\pi\sqrt{3}$, $(11+\sqrt{13})\pi$. **7.** $\frac{1}{9}\pi a^3$, $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi a^2$. **8.** $\frac{2}{3}\alpha R^3$, $2\alpha R^2$.

$\boxed{6.5}$ **2.** $2\pi(5+2\sqrt{5})$, $2\pi(5-2\sqrt{5})$. **3.** Шесть сферических сегментов площадью $\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и восемь «треугольников» площадью $\frac{\pi(3\sqrt{2}-4)}{8}$ каждый. **4.** $\frac{\pi}{3}(2R^3-3R^2d+d^3)$ и $\frac{\pi}{3}(2R^3+3R^2d-d^3)$. **5.** πR^2.

$\boxed{7.3}$ **1.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{108}$. **2.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **3.** В шесть раз. **4.** В $4\frac{1}{2}$. **5.** Правильные шестиугольники площадью $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **6.** Да. **7.** $\frac{1}{2}$, $\frac{23}{27}$, $\frac{23}{125}$. **8.** $\frac{7}{3}(\sqrt{2}-1)$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$. **9.** $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{6}$. **10.** $\frac{3}{2}$. **11.** Не более $\sqrt{2}$.

$\boxed{7.6}$ **1.** $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$. **2.** $\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$, $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$, $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$. **3.** $a\sqrt{7}$. **4.** Правильный десятиугольник. **5.** $\pi-\arcsin\frac{2}{3}$. **6.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **7.** Да (диагонали икосаэдра). **8.** $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a_3$, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$, $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}a$. **9.** $\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **10.** Правильный десятиугольник.

$\boxed{8.2}$ **1.** а) $\sqrt{38}$, б) $\sqrt{42}$. **2.** $\left(-\frac{5}{2};0;0\right)$. **3.** $\left(\frac{8}{5};\frac{7}{8};0\right)$; $\left(\frac{9}{10};0;-\frac{7}{6}\right)$; $\left(0;-\frac{9}{8};-\frac{8}{3}\right)$. **4.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$. **5.** $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=17$. **6.** $x^2+(y-2)^2+z^2=9$. **7.** $\left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\sqrt{14}$. **8.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=1$. **9.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=17$. **10.** $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=(\sqrt{6}\pm1)^2$. **11.** $\left(\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}\right)$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{8.3}$ **1.** $3x-2y+4z-29=0$. **2.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. **4.** $2x-y-3z+13=0$. **5.** $3x-3y+z+1=0$. **6.** $x+y+3z=0$. **7.** $x+2y+3z\pm\sqrt{14}=0$. **9.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$. **10.** $z=0$ и $24x-36y+23z-72=0$.

8.4 **1.** $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = -\frac{z-3}{6}$. **3.** (23; −17; 0), $\left(0; \frac{7}{5}; \frac{23}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{4}; 0; \frac{17}{4}\right)$. **4.** (1; 0; 5). **5.** Прямая, задаваемая системой уравнений: $2x + 14y + 22z - 21 = 0$, $2x - 5y - z - 7 = 0$. **7.** $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{2}$.

8. (0; 7; −1). **9.** $\frac{27}{\sqrt{26}}$. **10.** $x - 2y - 3y + 4 = 0$, $2x + y - z - 2 = 0$.

8.6 **1.** (8; −2; 2), (−6; 4; 2). **2.** $B_1(5; 1; -2)$, $C(-1; 2; 2)$. **3.** а) $A_1(-1; 2; 1)$, $B_1(0; 1; 3)$, $D(2; 1; -2)$, $D_1(0; 3; 0)$; б) $A_1\left(-4; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(-1; \frac{3}{2}; 0\right)$, $C_1\left(-2; \frac{1}{2}; 2\right)$, $D\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right)$. **4.** а) (0; 0; 0), (−4; 4; 4), (−8; 8; 8); б) (0; 0; 0), (−4; −1; 0), (−8; −2; 0). **5.** $\vec{a} = \vec{n} + 2\vec{p}$. **6.** а) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

$\overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}_1$,

$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$;

в) $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AC})$,

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AC})$.

8.7 **1.** а) $\arccos\left(-\frac{3}{13}\right)$, $\arccos\frac{20}{\sqrt{406}}$, $\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$. **3.** а) $\arccos\frac{3}{2\sqrt{21}}$; б) $\arccos\frac{4}{\sqrt{42}}$. **4.** $\sqrt{35 + (12)\sqrt{2}}$. **5.** $\arccos\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{3}$. **6.** $\arccos\frac{6}{7}$, $\arccos\frac{3}{7}$, $\arccos\frac{4}{7}$. **8.** (7; 0; 0), $\left(0; \frac{7}{2}; 0\right)$, $\left(0; 0; \frac{7}{3}\right)$.

9.2 **6.** а) $2x + 2y + 2z = 3$; б) $6x + 6y + 6z = 21$. **7.** Ось направлена вдоль вектора $\vec{v}(1; 1; 1)$ и проходит через начало координат, а угол равен 60°.

9.8 **1.** Если $\varphi + \psi$ не равно 180°, то композиция — это поворот на угол $\varphi + \psi$ вокруг оси, параллельной данным. Если $\varphi + \psi = 180°$, то композиция равна параллельному переносу на вектор, перпендикулярный данным осям. **2.** Винтовое движение или параллельный перенос.

4. Композиция отражения относительно произвольной плоскости, проходящей через данную точку, и поворот на угол 180° вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости, и проходящей через данную точку. **5.** а) Параллельный перенос; б) — г) вращение. **6.** а) Параллельный перенос на вектор $\vec{v}\left(\frac{16}{29}; 1\frac{11}{29}; 0\right)$; б) вращение на угол 180° вокруг оси, направленной вдоль вектора $\vec{v}(1; -1; 0)$ и проходящей через начало координат; в) вращение на угол 270° вокруг оси Ox (или вокруг оси с противоположным направлением на угол 90°); г) вращение на угол 120° вокруг оси, направленной вдоль вектора $\vec{v}(1; -1; 1)$ и проходящей через начало координат. **7.** Такое движение существует, это центральная симметрия с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **9.** Две гомотетии, если сферы не являются концентрическими и имеют разные радиусы, в противном случае — одна гомотетия. **10.** а) Центр в точке $\left(-\frac{5}{2}; 0; 0\right)$, коэффициент гомотетии 3; б) центр в точке $\left(\frac{5}{4}; 0; 0\right)$, коэффициент гомотетии -3.

Дополнительные задачи и задачи для повторения

7. Треугольник, четырёхугольник, шестиугольник. **8.** $\frac{25}{8}$. **9.** $\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **10.** 1 : 7. **11.** 8 : 19. **14.** $2\arcsin\frac{1}{6}$. **15.** 2 : 1. **16.** 1 : 1. **17.** а) $\frac{3}{2}a^3\sqrt{3}$; б) $a\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **18.** а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\pi - \arccos\frac{1}{4}$; д) $a\frac{5\sqrt{3}}{12}$; е) $a\frac{\sqrt{3}}{6}$; ж) $\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}$; $a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. **19.** а) $a^3\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 45°; в) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$; г) $\pi - \arccos\frac{5}{7}$; д) a; е) $\frac{\sqrt{21}-3}{4}a$. **20.** $20\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{139}{3}}$ и $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$, $\frac{\sqrt{217}}{18}$, $\frac{1}{7}$. **23.** $\frac{4h^2}{3\sqrt{3}}$, где $0 < h \leqslant \sqrt{3}$. **24.** $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **25.** $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. **26.** $\frac{1}{8}a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **27.** $\frac{1}{3}(20\sqrt{3} + 33)$. **28.** Если $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, то отношение объёмов равно $\frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 - 1$; если $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, то оно равно $\frac{(2(1+x)^3 + (2x-1)^3) - 9x^3}{9x^3 - (2x-1)^3}$. **29.** $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$. **30.** $\frac{\pi}{12}(2 - \sqrt{3})$. **31.** $\frac{\pi}{24}$. **32.** Четыре сферических сегмента площадью

$\frac{\pi}{12}(3 - \sqrt{3})$ и четыре криволинейных треугольника площадью $\frac{\pi}{24}(2\sqrt{3} - 3)$. **33.** $\frac{3}{\sqrt{11}}a$ или $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **34.** $a^3\frac{\pi}{3}\sqrt{2}$. **35.** $a^2\frac{\sqrt{6}}{6}$. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{3}R$. **37.** Окружность с центром в M и радиусом $\sqrt{MA \cdot MB}$. **38.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$\frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. **39.** $\frac{1}{15}V$. **40.** $\frac{2}{9}V$. **41.** $\frac{a^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

42. Невозможна. **43.** $\arcsin\left(\frac{3}{5}\sin\alpha\right)$, $\arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\alpha\right)$. **44.** $\arccos\frac{1}{6}$.

46. 12. **47.** $1 - a$. **49.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **50.** 1 : 3. **51.** $\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha$. **52.** $\sqrt{65 + (12)\sqrt{2}}$ или $\sqrt{35 + (12)\sqrt{2}}$. **55.** $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **56.** $\frac{560 + 104\sqrt{52}}{27}$. **59.** Четыре.

60. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. **61.** $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, 3. **62.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. **63.** $\frac{1}{6}ab^2\operatorname{ctg}\alpha$.

64. $\frac{2}{9}$. **66.** $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. **67.** Если $d \leqslant \sqrt{ab}$, то наибольший угол равен $\operatorname{arctg}\frac{|b^2 - a^2|}{2\sqrt{ab}}$; если $d > \sqrt{ab}$, то он равен $\operatorname{arctg}\frac{d|b - a|}{ab + d^2}$. **68.** Если $R \leqslant r\sqrt{2}$, то высота равна $r \pm \sqrt{2r^2 - R^2}$; в других случаях задача не имеет решений. **70.** $\frac{196}{3\sqrt{3}}$.

Предметный указатель

Оглавление

11 класс

5. Объёмы многогранников

6. Объёмы и поверхности круглых тел

7. Правильные многогранники

8. Координаты и векторы в пространстве

9*. Движения пространства

Учебное издание

Шарыгин Игорь Федорович

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

Базовый уровень

10—11 классы

Учебник

Зав. редакцией *О. В. Муравина*
Редактор *Т. С. Зельдман*
Художественный редактор *А. В. Пряхин*
Художественное оформление *А. В. Кузнецов*
Художник *В. А. Иванюк*
Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ
знак информационной продукции на данное издание не ставится

Сертификат соответствия
№ РОСС RU. AE51. H 16238.

Подписано к печати 01.03.13. Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 375.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49. Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Сайт ООО «Дрофа»: www.drofa.ru

Электронная почта: sales@drofa.ru

Тел.: 8-800-200-05-50 (звонок по России бесплатный)

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО "Тверской полиграфический комбинат". 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс: (4822)44-42-15
Home page - www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru